

В. Ф. КАГАН

ОСНОВАНИЯ
ГЕОМЕТРИИ



В. Ф. КАГАН

ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

**УЧЕНИЕ ОБ ОБОСНОВАНИИ ГЕОМЕТРИИ
В ХОДЕ ЕГО ИСТОРИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ**

**ЧАСТЬ ВТОРАЯ
ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО
И РАЗВИТИЕ ЕЕ ИДЕЙ**

**ПРИ РЕДАКЦИОННОМ УЧАСТИИ
Г. Б. ГУРЕВИЧА, Я. С. ДУБНОВА,
П. К. РАШЕВСКОГО**

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1956**

Каган Вениамин Федорович.

Основания геометрии.

Редактор *А. Ф. Лапко.*

Техн. редактор *С. С. Гаврилов.*

Корректор *И. Л. Едская.*

Сдано в набор 19/X 1955 г. Подписано к печати 5/I 1956 г. Бумага $70 \times 108^{1/16}$. Физ. печ. л. 21,5.
Условн. печ. л. 29,45. Уч.-изд. л. 25,99. Тираж 5000 экз. Т-01711. Цена книги 15 р.
Заказ № 1247.

Государственное издательство технико-теоретической литературы.
Москва, В-71, Б. Калужская, 15.

16-я типография Главполиграфпрома Министерства культуры СССР.
Москва, Трехпрудный пер., 9.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	9
ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ	
ОСУЩЕСТВЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО НА ПОВЕРХНОСТЯХ ПОСТОЯННОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ	
§ 58. Работы Бельтрами	11
1. Возрождение неевклидовой геометрии (11). 2. Картографическая задача Бельтрами (12). 3. Геодезическое отображение поверхности на плоскость и его выполнение для сферы (12). 4. Общее решение задачи о геодезическом отображении поверхности на плоскость (14). 5. Геометрия поверхностей постоянной отрицательной кривизны (16). 6. Метрические соотношения на псевдосферических поверхностях (19). 7. Дефекты рассуждения Бельтрами (23). 8. Прямое доказательство теоремы Бельтрами (23).	
§ 59. Псевдосферические поверхности	24
1. Поверхности вращения постоянной кривизны (24). 2. Классификация поверхностей вращения постоянной отрицательной кривизны (25). 3. Псевдосфера (28). 4. Площадь псевдосферы и ограничиваемый ею объем (29). 5. Отображение псевдосферы на евклидову плоскость (30). 6. Отображение псевдосферы на гиперболическую плоскость (32). 7. Разыскание других поверхностей постоянной отрицательной кривизны (33).	
ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ	
ГЕОМЕТРИЯ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ	
§ 60. Эрлангенская программа	37
1. Отображение гиперболической плоскости на евклидову (37). 2. Интерпретация геометрического движения (38). 3. Основная задача Эрлангенской программы (39). 4. Геометрические движения как группы преобразований (39). 5. Развитие основной идеи (41). 6. Изоморфные геометрии (42).	
§ 61. Аналитическое выражение группы и простейшие свойства непрерывных групп преобразований	43
1. Аналитическое выражение группы (43). 2. Перемножение преобразований (46). 3. Нормальная подгруппа данной группы (47). 4. Транзитивные группы (47). 5. Инварианты группы (48). 6. Изоморфные группы преобразований (49). 7. Полугруппа преобразований (49).	
§ 62. Простейшие группы преобразований	49
1. Скользящая прямая (49). 2. Двучленные группы преобразований прямой (52). 3. Группа проективных преобразований прямой (53). 4. Общий результат исследования групп преобразований прямой (54). 5. Группа преобразований плоскости; группа евклидовых движений (55). 6. Нормальный делитель и фактор-группа группы движений в евклидовой плоскости (56). 7. Группа преобразований подо-	

бия (57). 8. Группа аффинных преобразований (57). 9. Группа проективных преобразований плоскости (59). 10. Другое выражение группы движений в плоскости (60). 11. Группы преобразований пространства (61). 12. Выполнение замысла Клейна (63).

ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ

ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО В ИНТЕРПРЕТАЦИИ КЛЕЙНА

- § 63. Группа инвариантного круга и соответствующая интерпретация гиперболической геометрии 64
1. Проективные преобразования, оставляющие инвариантным данный круг (64). 2. Группа Кэли—Клейна (66). 3. Двумерная гиперболическая геометрия, построенная внутри единичного круга (67). 4. Гиперболические движения и отражения, оставляющие центр основного круга в покое (68). 5. Гиперболические движения и отражения, оставляющие инвариантной ось абсцисс (69). 6. Законы движения в L_2 (71). 7. Геометрия в пространстве L_2 (72). 8. Линейное протяжение в пространстве L_2 и аксиома Архимеда (73). 9. Постулат о параллельных в L_2 (73).
- § 64. Построение двумерной геометрии Лобачевского внутри евклидова круга 75
1. Расстояние между двумя точками (75). 2. отождествление расстояния в L_2 с соответствующим расстоянием в гиперболической плоскости (76). 3. Преобразования прямых при движениях и отражениях в L_2 (78). 4. Две прямые; измерение углов в L_2 (78). 5. Перпендикулярные прямые в L_2 (80). 6. Вычисление угла параллельности (81). 7. Кривые постоянной кривизны в L_2 (82). 8. Заключительные соображения (84).
- § 65. Интерпретации Клейна 84
1. Общая постановка замысла Клейна (84). 2. Замена кругового абсолюта другим овальным коническим сечением (85). 3. Выражение расстояния между двумя точками в модели Клейна при любом овальном абсолюте (86). 4. Общая теорема (87). 5. Распространение тех же идей на трехмерное пространство (87).
- § 66. Проективное преобразование конического сечения 88
1. Обогащение гиперболической плоскости новыми точками и прямыми (88). 2. Плоскость Лобачевского и гиперболическая плоскость (88). 3. Пространство Лобачевского и гиперболическое пространство (90). 4. Группа проективных преобразований конического сечения (91). 5. Ось и центр проективного преобразования конического сечения (92). 6. Проективное преобразование плоскости, вызываемое проективным преобразованием овального конического сечения (94). 7. Отражение плоскости L_2 от прямой (95). 8. Скольжение плоскости L_2 вдоль прямой (96). 9. Вращение плоскости L_2 вокруг обыкновенной ее точки (97). 10. Вращение плоскости L_2 вокруг бесконечно удаленной ее точки (98). 11. Классификация автоморфизмов плоскости L_2 (99). 12. Разложение автоморфизма плоскости L_2 на отражения от прямой (99). 13. Общая теорема о разбиении автоморфизма плоскости L_2 на отражения от прямой (101).
- § 67. Геометрические построения в плоскости Лобачевского, выполняемые на модели Клейна 101
1. Постановка задачи (101). 2. Поворот отрезка вокруг его конечной точки на данный угол (102). 3. Отрезок AB разделить (в L_2) пополам (103). 4. Завершение построения, рассмотренного в рубр. 2 (104). 5. Построение в L_2 отражения данной точки от данной прямой (104). 6. Данную точку в L_2 привести в совмещение с любой другой данной точкой (105). 7. Выполнить в L_2 поворот вокруг заданного центра C (105). 8. Данный угол разделить пополам (построить биссектрису данного угла) (106). 9. Перенести вершину данного угла в данную точку (106). 10. Построить угол параллельности, соответствующий данному отрезку, и отрезок параллельности, соответствующий данному острому углу (107).

ГЛАВА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ

ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

§ 68. Инварианты уравнения линии второго порядка на плоскости L_2 . . . 109

1. Порядок алгебраической линии на плоскости L_2 (109). 2. Матрица и дискриминант уравнения линии второго порядка (110). 3. Гиперболические движения в однородных бильтрамиевых координатах (111). 4. Вращения вокруг точки и скольжения вдоль прямой (112). 5. Движения, оставляющие неподвижной граничную точку $A(1, 0, 1)$ (114). 6. Дискриминант уравнения линии второго порядка как инвариант (117). 7. Характеристический полином и характеристические числа уравнения линии второго порядка (119). 8. Инварианты уравнения вырожденной линии второго порядка (120).

§ 69. Классификация линий второго порядка на плоскости Лобачевского 122

1. Вводные соображения (122). 2. Канонические виды уравнений пар прямых на расширенной плоскости Лобачевского (122). 3. Канонические виды уравнений невырожденных линий второго порядка (124). 4. Классификация невырожденных линий второго порядка в случае, когда характеристические числа все различны (125). 5. Классификация невырожденных линий второго порядка в случае, когда одно характеристическое число—простое, а другое—двукратное (126). 6. Классификация невырожденных линий второго порядка в случае, когда характеристическое число—трехкратное (128). 7. Классификация вырожденных линий второго порядка (128).

ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ

РАЗВИТИЕ ИДЕЙ КЛЕЙНА

§ 70. Мемуар Кэли 130

1. Задача Кэли (130). 2. Гармонические пары точек (131). 3. Две пары точек, разделяющие или не разделяющие друг друга (132). 4. Другой путь к установлению пары точек, делящих гармонически каждую из двух других пар точек (133). 5. Абсолют (135). 6. Середина отрезка относительно абсолюта (135). 7. Вычисление координат середины отрезка относительно абсолюта (135). 8. Метрика Кэли в образе первой ступени (136). 9. Построение метрики Кэли (138).

§ 71. Анализ работы Кэли и развитие его идей 139

1. Эллиптическое мероопределение на прямой (139). 2. Гиперболическое мероопределение на прямой (141). 3. Параболическое мероопределение (143). 4. Проективное мероопределение (144). 5. Мероопределение в пучке прямых (мероопределение углов) (145).

§ 72. Геометрические идеи Римана 147

1. Основной мемуар Римана (147). 2. Метрика в римановом пространстве (148). 3. Геодезические линии в римановом пространстве (150). 4. Кривизна риманова пространства (151). 5. Риманово пространство постоянной кривизны (152). 6. Мемуар Гельмгольца (153). 7. Заключительные соображения Римана (154). 8. Геометрии Евклида, Лобачевского и Римана в R_n (154).

ГЛАВА ШЕСТНАДЦАТАЯ

ОСНОВЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 73. Геометрия эллиптической прямой 157

1. Введение (157). 2. Определение точки двумя координатами (157). 3. Расстояние между двумя точками (158). 4. Взаимное расположение двух пар точек на эллиптической прямой (159). 5. Основные свойства взаимного расположения двух пар точек эллиптической прямой (161). 6. Деление эллиптической прямой на части двумя ее точками (161). 7. Расположение точек на сегменте эллиптической прямой (162). 8. Эллиптическая прямая в системе Кэли (163). 9. Эллиптическая и проективная прямая (163).

§ 74. Геометрия эллиптической плоскости	164
1. Сферическая и эллиптическая геометрия двумерного многообразия (164). 2. Исходные начала геометрии эллиптической плоскости в аналитическом ее построении (164). 3. Элемент длины в эллиптической плоскости (166). 4. Прямая эллиптической плоскости (166). 5. Эллиптическая прямая на эллиптической плоскости (167). 6. Полюсы и поляры на эллиптической плоскости (167). 7. Две прямые в эллиптической плоскости (168). 8. Угол между двумя прямыми в $\mathcal{E}_2$ (169). 9. Начало двойственности в эллиптической плоскости (169). 10. Пучок прямых (170). 11. Треугольник и трехсторонник в эллиптической плоскости (171). 12. Треугольники «с фиксированной внутренностью» (173). 13. Тригонометрия эллиптической плоскости (174). 14. Угловой избыток и площадь треугольника (176). 15. Взаимно полярные треугольники (176). 16. Бельтрамиевы координаты в эллиптической плоскости (179). 17. Кривизна эллиптической плоскости (180). 18. Риманово выражение элемента длины эллиптической плоскости (180).	
§ 75. Начала геометрии трехмерного эллиптического пространства	182
1. Определение трехмерного эллиптического пространства (182). 2. Метрика трехмерного эллиптического пространства (183). 3. Плоскость трехмерного эллиптического пространства представляет собой двумерное эллиптическое многообразие (184). 4. Прямая в эллиптическом пространстве (185). 5. Элемент длины в трехмерном эллиптическом пространстве (186). 6. Геодезическое отображение трехмерного эллиптического пространства на евклидово (186). 7. Уравнение прямой в эллиптическом пространстве, проходящей через две данные точки (187). 8. Опорные точки координации прямой (189). 9. Прямолинейное расположение полюсов плоскостей, пересекающихся по общей прямой (190). 10. Угол между двумя пересекающимися прямыми в эллиптическом пространстве (191). 11. Взаимно полярные прямые в эллиптическом пространстве (191). 12. Обзор важнейших движений в $\mathcal{E}_3$ (192). 13. Обзор движений и отражений в $\mathcal{E}_3$, оставляющих в покое некоторую прямую (193). 14. Перпендикуляр из точки на прямую в $\mathcal{E}_3$ (195).	
§ 76. Прямые и поверхности Клиффорда в эллиптическом пространстве . .	196
1. Расстояние между точками двух прямых (196). 2. Исследование характеристического уравнения, когда оно имеет различные корни (199). 3. Случай, когда характеристическое уравнение имеет нулевой корень (200). 4. Экстремальные общие перпендикуляры к двум непересекающимся прямым (200). 5. Другие общие перпендикуляры к двум прямым (202). 6. Клиффордовы параллели в $\mathcal{E}_3$ (204). 7. Построение клиффордовой параллели к данной прямой через данную точку (206). 8. Клиффордовы поверхности (207). 9. Декартовы координаты на клиффордовой поверхности (208).	
ГЛАВА СЕМНАДЦАТАЯ	
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ КЭЛИ—КЛЕЙНА	
§ 77. Геометрии Кэли—Клейна с невырожденным абсолютот	210
1. Геометрия Кэли—Клейна вне кругового абсолюта; система HN (210). 2. Геометрия Кэли—Клейна вне кругового абсолюта; система EH (213). 3. Выражения длин и углов в геометрических системах с круговым абсолютот (I , II_1 , II_2) (214). 4. Геометрия мнимого невырожденного абсолюта (геометрия Римана) (216). 5. Дифференциальные метрические формы римановой геометрии (218). 6. Сравнение формул для измерения расстояний и углов в геометрических системах I , II_1 , II_2 и III (219).	
§ 78. Геометрии Кэли—Клейна с вырожденным абсолютот	221
1. Геометрические системы с аффинной группой (221). 2. Евклидова геометрия в системе Кэли—Клейна (222). 3. Псевдоевклидова геометрия (224). 4. Системы, двойственные евклидовой и псевдоевклидовой геометрии (225). 5. Аналитические вычисления, относящиеся к систе-	

ме V_2 (226). 6. Вычисления, относящиеся к системе V_1 (227). 7. Система с дважды параболической метрикой (228). 8. Заключение (229).

ГЛАВА ВОСЕМНАДЦАТАЯ

ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО В ИНТЕРПРЕТАЦИИ ПУАНКАРЕ

§ 79. Круговые преобразования плоскости 231

1. Группа круговых преобразований плоскости (231). 2. Доказательство основной теоремы (232). 3. Второе доказательство той же теоремы (233). 4. Круговые преобразования, не выражаемые равенством (1) (235). 5. Основная группа круговых преобразований (235). 6. Основные инварианты круговых преобразований (236). 7. Специальные автоморфизмы (237). 8. Двойные точки специального автоморфизма (239).

§ 80. Интерпретация гиперболической геометрии, данная Пуанкаре 239

1. Субстрат группы интерпретации Пуанкаре (239). 2. Свойства «движений» (240). 3. Метрика в P_2 (241). 4. Свойства «отражений» (243). 5. Аксиоматика геометрии в P_2 (243). 6. Основная метрическая форма в P_2 (245). 7. Кривые постоянной кривизны в P_2 (246). 8. Конформное отображение гиперболической плоскости на евклидову внутри круга (249). 9. Интерпретация Пуанкаре с круговым абсолютом (249). 10. Простейшие построения в этой интерпретации (250).

ГЛАВА ДЕВЯТНАДЦАТАЯ

АКСИОМАТИКА ПРЯМОЙ

§ 81. Учение о величине 252

1. Вводные соображения (252). 2. Различного рода отношения, связывающие элементы некоторого множества (252). 3. Отношения, определяющие величину (253). 4. Совокупность свойств, вытекающих из постулатов сравнения (253). 5. Совместность и независимость постулатов сравнения (254). 6. Аксиоматическое определение (258).

§ 82. Постулаты расположения и структуры 258

1. План изложения (258). 2. Постулаты (аксиомы) расположения или порядка (259). 3. Перечень постулатов расположения (260). 4. Непротиворечивость постулатов расположения (261). 5. Независимость постулатов расположения (261). 6. Постулаты структуры (264).

§ 83. Прямолинейные образы и разбиение их точкой 265

1. Прямолинейные образы (265). 2. Отрезок и интервал прямой (265). 3. Группа точек прямой (266). 4. Разбиение прямолинейного образа на L_{II} (267). 5. Разбиение прямолинейного образа на L_{II} одной из его внутренних точек (268). 6. Прямолинейные лучи (269). 7. Разбиение луча внутренней точкой (269).

§ 84. Две стороны прямой 270

1. Сонаправленные и противоположенные лучи (270). 2. Сопоставление сторон, в которые обращены три луча (271). 3. Две стороны прямой (273). 4. Ориентированная прямая как упорядоченное множество ее точек (274). 5. Претворение вершинных отрезков луча в величину (274).

§ 85. Постулаты конгруэнтности 275

1. Постулаты конгруэнтности (275). 2. Непротиворечивость постулатов конгруэнтности (276). 3. Независимость постулатов конгруэнтности (276). 4. Ближайшие следствия постулатов конгруэнтности (277). 5. Сложение отрезков (278). 6. Отрезки, кратные данному отрезку (279). 7. Разность двух отрезков (280).

§ 86. Постулат Архимеда 280

1. Постулат Архимеда (280). 2. Независимость постулата Архимеда от постулатов I—III. Работа Веронезе (281). 3. Простейший слу-

чай системы Веронезе (282). 4. Претворение комплексных чисел в величину (283). 5. Аналитическое выражение линейного неархимедова пространства Веронезе (285). 6. Трансфинитное (неархимедово) пространство Гильберта (285).	
§ 87. Метрика архимедовой прямой	286
1. Основные теоремы (286). 2. Структура архимедовой прямой (287). 3. Коммутативность суммы отрезков (288). 4. Теоремы содержимости (289). 5. Евклидов алгоритм и отношение двух отрезков архимедовой прямой (290). 6. Подходящие дроби как приближенные значения отношения отрезков (292). 7. Сравнение двух отрезков по значениям их отношений к третьему отрезку (292). 8. Другое определение отношения двух отрезков (293). 9. Аддитивность отношения отрезков (294). 10. Пропорциональные отрезки (294). 11. Измерение отрезков (295).	
§ 88. Метрика непрерывной прямой	296
1. Постулат Кантора (296). 2. Непрерывная прямая (297). 3. Принципы Дедекнда в множестве отрезков ориентированной непрерывной прямой (299). 4. Метрика непрерывной прямой (299). 5. Пропаведение отрезка на положительное число (300). 6. Нулевой отрезок (301). 7. Длина отрезка непрерывной прямой; координата точек прямой (301). 8. Изоморфные прямые (302). 9. Полнота геометрической системы (303).	
§ 89. Движения прямой в себе	305
1. Группа движений ориентированной прямой в себе (305). 2. Аксиоматика конгруэнтности, выраженная в терминах теории групп (306). 3. Непротиворечивость и независимость постулатов движения (307). 4. Вывод требований, содержащихся в постулатах конгруэнтности, из постулатов движения (308).	
§ 90. Геометрия двусторонней прямой	309
1. Группа движений и отражений прямой в себе (309). 2. Аксиоматика двусторонней прямой и ее ближайшие следствия (310). 3. Обзор геометрии прямой (311).	
ДОПОЛНЕНИЯ	
Б. А. Розенфельд. Гиперболическая плоскость как сфера мнимого радиуса	313
1. Псевдоевклидово пространство (314). 2. Сфера мнимого радиуса (317). 3. Связь с интерпретациями Клейна и Пуанкаре (319).	
Б. А. Розенфельд. Новые исследования по предистории неевклидовой геометрии	322
1. Аристотель о теории параллельных линий (323). 2. Теория параллельных линий Омара Хайяма (325). 3. Теория параллельных линий Насир-аддина ат-Туси (328).	
Литература	332
Именной указатель	336
Предметный указатель	338
Указатель обозначений	344

ПРЕДИСЛОВИЕ

Согласно планам автора книги В. Ф. Кагана «Основания геометрии» должны были состоять из трех частей. Первая часть, посвященная обстоятельному изложению геометрии Лобачевского, составила содержание первого тома, вышедшего в свет в 1949 г. Во вторую часть предполагалось включить историю признания геометрии Лобачевского и доказательство ее непротиворечивости на базе изучения важнейших ее интерпретаций. Наконец, третья часть должна была содержать аксиоматику евклидовой и неевклидовых геометрий вместе с построением их на аксиоматической основе. Вторая и третья части составили бы, по предположениям автора, второй том сочинения.

Указанному широкому замыслу не суждено было, к сожалению, осуществиться: 8 мая 1953 г. В. Ф. Каган скончался на 85-м году жизни. В его бумагах осталась рукопись второй части, далеко еще полностью не оформленная, и первые наброски третьей части. Семинар по векторному и тензорному анализу при Московском государственном университете, которым руководил В. Ф. Каган, принял на заседании 18 мая 1953 г. решение привести в окончательный вид и подготовить к печати вторую часть книги; руководство этой работой было поручено членам семинара Г. Б. Гуревичу, Я. С. Дубнову и П. К. Рашевскому. От мысли об издании третьей части в полном виде пришлось отказаться; из нее публикуется лишь первый раздел, содержащий аксиоматику прямой.

Редактирование отдельных глав рукописи провели следующие члены семинара: гл. XI, XII—А. М. Лопшиц, гл. XIII, XV—Я. С. Дубнов, гл. XIV—Г. Б. Гуревич, гл. XVI—П. К. Рашевский, гл. XVII—И. М. Яглом, гл. XVIII—М. Г. Фрейдина, гл. XIX—А. Ф. Лапко. Глава XIV была составлена по материалам дипломных работ А. В. Яблоновского и В. Г. Ямпольского «Кривые второго порядка на плоскости Лобачевского», выполненных под руководством В. Ф. Кагана.

*Семинар по векторному
и тензорному анализу*

Февраль 1955 г.



ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

ОСУЩЕСТВЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО НА ПОВЕРХНОСТЯХ ПОСТОЯННОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

§ 58. РАБОТЫ БЕЛЬТРАМИ

1. Возрождение неевклидовой геометрии. В конце 50-х и в начале 60-х годов прошлого столетия была опубликована переписка между Гауссом и Шумахером (C. F. Gauss und H. C. Schumacher [1]). Во втором томе этого издания помещены два письма Гаусса от 1831 г., относящихся к теории параллельных линий. Второе из этих писем содержит краткое изложение тех взглядов Гаусса по этому вопросу, о которых он сообщал в приведенном выше (ч. I, стр. 469) его письме к Тауринусу. В пятом томе помещено письмо Шумахеру от 26 ноября 1846 г., в котором Гаусс с большим уважением говорит о Лобачевском и обращает внимание на его замечательную книгу. Приводим здесь перевод этого письма.

«В последнее время я имел случай вновь прочесть небольшое сочинение Лобачевского под заглавием «*Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*»¹). Это сочинение содержит основы геометрии, которая должна была бы существовать и допускала бы строго последовательное развитие, если бы евклидова геометрия не была истинной. Некто Швейкарт дал этой геометрии название «звездной», а Лобачевский—«воображаемой геометрии». Вы знаете, что уже 54 года (с 1792 г.) я разделяю те же взгляды, не говоря здесь о некотором развитии, которое мои идеи получили об этом предмете впоследствии. Следовательно, материально для меня нового я в сочинении Лобачевского не нашел; но в своем построении он следует другому пути, не тому, по которому я шел; и нужно сказать, что Лобачевский трактует предмет мастерски в истинно геометрическом духе. Я считаю себя обязанным обратить Ваше внимание на эту книгу, чтение которой доставит Вам исключительное удовольствие».

При том уважении, которым пользовался Гаусс, этим письмом было обращено внимание всего математического мира на работы Лобачевского, и его «воображаемая геометрия» была вновь призвана к жизни. Уэль (G. J. Noëel), профессор университета в Бордо, в 1866 г. перевел на французский язык «Геометрические исследования» Лобачевского [3], а в следующем 1867 г. им был переведен на французский язык «Аппендикс» Больаи (J. Bolyai [4]). В этом же году им была выпущена небольшая брошюра «Опыт критики оснований геометрии» [5]; здесь уже обстоятельно изложены основные идеи новой геометрии. В том же году Батальини

¹) См. русский перевод этой работы [2].

(G. Battaglini), познакомившись с идеями Лобачевского по переводу Уэля, перевел на итальянский язык «Пангеометрию» [6] и даже дал оригинальный вывод гиперболической тригонометрии [7]. По этим книгам с геометрией Лобачевского основательно познакомился итальянский геометр Бельтрами, который дал ей весьма замечательное освещение.

2. Картографическая задача Бельтрами. В середине 60-х годов прошлого столетия Бельтрами (Eugenio Beltrami) занимался вопросами картографии. Геометрическая задача картографии состоит в изображении земного шара или эллипсоида на плоскости, т. е. в однозначном отображении точек эллипсоида на всю евклидову плоскость или на ее часть. Геометры обобщили эту задачу и, начиная с Гаусса, занимались вопросом отображения одной произвольной поверхности на другую. Лучшим отображением является такое, при котором отображение каждой фигуры подобно оригиналу, т. е. длины соответственных линий пропорциональны, а соответственные углы равны. Однако достичь такого подобия при отображении произвольной поверхности на плоскость вообще невозможно; это осуществимо только в том случае, когда отображаемая поверхность может быть развернута на плоскость; в частности, такое пропорциональное отображение шара или эллипсоида на плоскость, как это было бы желательным в картографии, невозможно; поэтому издавна геометры и картографы ставили другие условия отображения, которые соответствовали различным задачам карты: для целей мореплавания, для военных целей и т. п. Так, еще в XVI столетии Меркатор указал способ построения карты, при котором параллели изображаются параллельными прямыми, а меридианы — перпендикулярными к ним прямыми; этим способом часто пользуются и в настоящее время. В большом ходу два других способа, основы которых были указаны Гауссом: так называемое *конформное отображение*, при котором отображение тем ближе к подобию, чем меньше отображаемая область¹⁾, и *эквивалентное отображение*, при котором площадь изображения пропорциональна площади изображаемого объекта²⁾.

Бельтрами предложил своеобразное построение карты. Он поставил себе целью дать такое отображение поверхности на плоскость, при котором все геодезические линии поверхности изображались бы на карте прямыми. Эту задачу он разрешил до конца в том смысле, что показал, какие поверхности допускают такое отображение и как оно может быть выполнено. Мы воспроизведем здесь общий ход рассуждений Бельтрами.

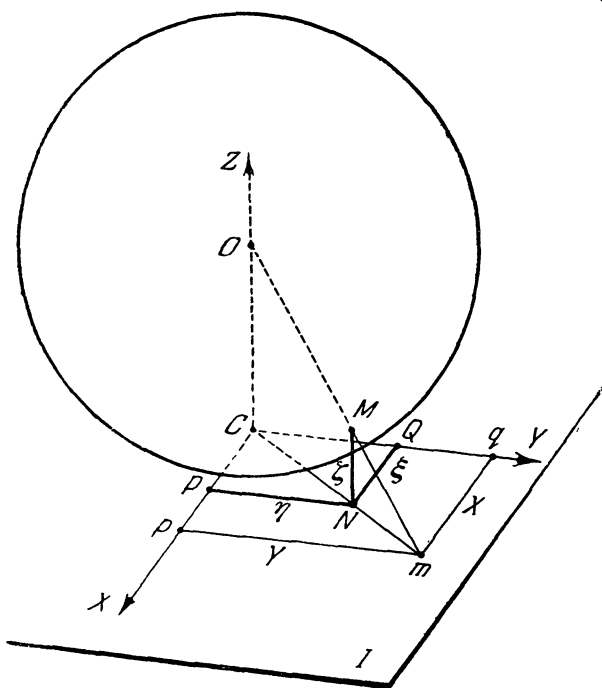
3. Геодезическое отображение поверхности на плоскость и его выполнение для сферы. О т о б р а ж е н и е Б е л ь т р а м и в настоящее время называют *геодезическим*. Легко видеть, что такое отображение допускает сфера: если за изображение каждой точки на сфере принять ее проекцию из центра сферы на какую-либо определенную плоскость, то каждый большой круг изобразится прямой линией (при этом, правда, однозначно отобразится на плоскость не вся сфера, а только ее половина; точнее, две диаметрально противоположные точки сферы при этом изобразятся одной точкой плоскости). Этим отображением займемся подробнее.

Пусть I будет плоскость, касающаяся сферы в точке C (черт. 1), — мы примем ее за плоскость карты. Из центра сферы O проектируем

¹⁾ Конформное отображение сохраняет углы между линиями; карта Меркатора также конформная.

²⁾ Подробнее об этом см. В. Ф. Каган [8], т. II, § 62 и 66.

каждую точку полусферы M на плоскость I и проекцию m принимаем за изображение точки M на плоскости I . Точку C примем за начало ортогональных декартовых координат, оси CX и CY расположим в плоскости I , а ось CZ направим к центру сферы. Если из точки M опустим перпендикуляр MN на плоскость I , а точки N и m спроектируем также ортогонально на оси CX и CY (в точки P, Q и p, q), то длины отрезков NQ и NP , взятые с надлежащими знаками, будут служить



Черт. 1.

координатами ξ и η точки N , а длины отрезков mq и mp будут служить координатами X и Y точки m ; координатой ζ точки M будет служить длина отрезка MN . Если заданы координаты X, Y точки m , то ими определятся не только эта точка (m), но и соответствующая ей точка M на полусфере, примыкающей к плоскости I ; поэтому X, Y можно принять за (криволинейные) координаты точки M на полусфере.

Действительно, легко видеть, что координаты ξ, η, ζ выражаются через X, Y . Из подобия треугольников следует, что

$$NQ : mq = NP : mp = CN : Cm = OM : Om.$$

Если длину радиуса сферы обозначим через a , а длину отрезка Om через W , то

$$OM = a, \quad W^2 = a^2 + X^2 + Y^2 \quad (W > 0); \quad (1)$$

предыдущая пропорция принимает вид:

$$\xi : X = \eta : Y = a : W,$$

отсюда

$$\xi = a \frac{X}{W}, \quad \eta = a \frac{Y}{W}. \quad (2a)$$

Что касается координаты ζ , то из подобия треугольников MNt и Ocm имеем:

$$\zeta : a = Mm : Om, \quad \text{т. е.} \quad \zeta : a = (W - a) : W$$

и отсюда

$$\zeta = a - a \frac{a}{W}. \quad (2b)$$

В некоторых случаях оказывается более удобным принять за начало координат центр сферы O , за плоскость XY — диаметральную плоскость, перпендикулярную к радиусу OC , а ось Z направить по OC , так что уравнение (2b) заменится при этом более простым:

$$\zeta = a \frac{a}{W}.$$

Числа X, Y в настоящее время часто называют бельтрамиевыми координатами точки M на сфере.

Выразим основную метрическую форму сферы (квадрат элемента длины на ней) в бельтрамиевых координатах. Дифференцируя уравнения (2a) и (2b), получим:

$$d\xi = a \frac{W dX - X dW}{W^2}; \quad d\eta = a \frac{W dY - Y dW}{W^2}; \quad d\zeta = a^2 \frac{dW}{W^2}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \\ &= a^2 \frac{W^2 (dX^2 + dY^2) + (X^2 + Y^2 + a^2) dW^2 - 2(X dX + Y dY)W dW}{W^4}. \end{aligned}$$

Однако ввиду равенства (1) $X dX + Y dY = W dW$, и предыдущее выражение принимает вид:

$$\begin{aligned} ds^2 &= a^2 \frac{W^2 (dX^2 + dY^2) - (X dX + Y dY)^2}{W^4} = \\ &= a^2 \frac{(Y^2 + a^2) dX^2 + (X^2 + a^2) dY^2 - 2XY dX dY}{(X^2 + Y^2 + a^2)^2}. \end{aligned}$$

Наконец, если числитель и знаменатель разделим на a^4 и примем во внимание, что $\frac{1}{a^2}$ есть кривизна (K) сферы, то получим окончательно следующее выражение основной метрической формы на сфере в бельтрамиевых координатах:

$$ds^2 = \frac{(1 + KY^2) dX^2 + (1 + KX^2) dY^2 - 2KXY dX dY}{[1 + K(X^2 + Y^2)]^2}; \quad (3)$$

здесь K есть положительное число $\frac{1}{a^2}$.

4. Общее решение задачи о геодезическом отображении поверхности на плоскость. Замечательный результат, полученный Бельтрами и опубликованный им в 1865 г. [9], заключается в следующем.

Положим, что некоторая поверхность однозначно отображена на плоскость и последняя отнесена к ортогональным декартовым координатам x, y . Так как каждой точке на карте соответствует одна и только одна точка на поверхности, то мы можем рассматривать x, y как криволинейные координаты соответствующей точки на поверхности. В этих координатах каждая линия на поверхности, естественно, выражается тем же уравнением, что и ее изображение на карте. Но при-

мые на плоскости выражаются в декартовых координатах линейными уравнениями; если поэтому поверхность допускает геодезическое отображение на плоскость, то ее геодезические линии в надлежащих координатах должны выражаться линейными уравнениями. Задача о разыскании таких поверхностей, которые допускают геодезическое отображение на плоскость, сводится к разысканию поверхностей, на которых геодезические линии выражаются в некоторой подходящей криволинейной координатной системе линейными уравнениями. Эти поверхности Бельтрами и поставил себе целью разыскать. Он шел к этой цели следующим путем.

Пусть поверхность, отнесенная к криволинейным координатам x, y , имеет метрическую форму

$$E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2; \quad (4)$$

ее геодезические линии определяются, как известно (см. [8], ч. I, стр. 414), системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которым удовлетворяют функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$, выражающие координаты текущей точки (x, y) на геодезической линии через какой-либо параметр t . Если в качестве такого параметра выбрать одну из координат текущей точки, скажем, x , то геодезическая линия определится одним уравнением: $y = y(x)$, в котором функция $y(x)$ удовлетворяет одному дифференциальному уравнению второго порядка; оно имеет вид

$$\begin{aligned} (EG - F^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(E \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{2} E \frac{\partial E}{\partial y} - \frac{1}{2} F \frac{\partial E}{\partial x} \right) - \\ - \left(\frac{3}{2} F \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{1}{2} G \frac{\partial E}{\partial x} - F \frac{\partial F}{\partial x} - E \frac{\partial G}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial x} - \\ - \left(G \frac{\partial E}{\partial y} + F \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{3}{2} F \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{1}{2} E \frac{\partial G}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \\ + \left(\frac{1}{2} F \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{1}{2} G \frac{\partial G}{\partial x} - G \frac{\partial F}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^3 = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

т. е. выражает вторую производную $\frac{d^2 y}{dx^2}$ как целую функцию третьей степени относительно первой производной $\frac{dy}{dx}$. Если в избранной координатной системе геодезические линии поверхности выражаются линейными уравнениями, то предыдущее уравнение должно принять простую форму: $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$, т. е. в левой его части коэффициенты при всех степенях производной $\frac{dy}{dx}$ и свободный член должны обратиться в нуль; это значит, что коэффициенты E, F, G формы (4) должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left. \begin{aligned} E \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{2} E \frac{\partial E}{\partial y} - \frac{1}{2} F \frac{\partial E}{\partial x} &= 0, \\ \frac{3}{2} F \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{1}{2} G \frac{\partial E}{\partial x} - F \frac{\partial F}{\partial x} - E \frac{\partial G}{\partial x} &= 0, \\ \frac{3}{2} F \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{1}{2} E \frac{\partial G}{\partial y} - F \frac{\partial F}{\partial y} - G \frac{\partial E}{\partial y} &= 0, \\ \frac{1}{2} F \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{1}{2} G \frac{\partial G}{\partial x} - G \frac{\partial F}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

С необычайным искусством Бельтрами проинтегрировал эту систему и показал, что на всякой поверхности, допускающей геодезическое отображение на плоскость, основная метрическая форма может быть после некоторого простого преобразования координат приведена к виду (3), где K имеет постоянное значение, которое, однако, может быть как положительным, так и отрицательным, может и обращаться в нуль. Существенно при этом, что K совпадает с кривизной поверхности. Действительно, мы уже знаем, что в случае сферы (а следовательно, и всякой поверхности, развертывающейся на сферу) K означает ее (постоянную) кривизну. Но кривизна в каждой точке поверхности выражается через коэффициенты ее метрической формы и их производные первого и второго порядка (в этом состоит, как известно, «*theorema egregium*» Гаусса). Выполнив требуемые этим выражением операции над коэффициентами формы, мы должны получить в случае сферы ее кривизну K ; а так как результат этих операций от значения постоянной K не зависит, то всякая поверхность, несущая на себе метрическую форму (3) с постоянным (как положительным, так и отрицательным) значением, имеет постоянную кривизну, выражаемую этим числом K . Эти последние соображения имеют, конечно, целью лишь избежать вычислений, которые требует формула, выражающая кривизну поверхности через метрические коэффициенты. Окончательный же результат заключается в следующем. Геодезическое отображение на плоскость допускают те и только те поверхности, которые имеют постоянную кривизну. При положительном значении K —это сфера или поверхность, развертывающаяся на сферу той же кривизны. При $K=0$ форма (3) принимает вид $dX^2 + dY^2$, и, следовательно, поверхность представляет собой плоскость или развертывается на плоскость. При отрицательном значении K —это поверхность постоянной отрицательной кривизны.

Такова теорема о геодезическом отображении поверхности на плоскость, установленная Бельтрами в 1865 г. в мемуаре [9]. Интегрирование системы уравнений (6) потребовало сложных вычислений; позднее доказательство этой теоремы было значительно упрощено (см. Дарбу (G. Darboux) [10], III, § 607; Каган [8], II, § 65). В соответствии с особенностями аналитических рассуждений, слабые стороны которых в эпоху Бельтрами еще не были изжиты, решение поставленной им задачи не было доведено самим Бельтрами до конца. Им не был решен, не был даже поставлен вопрос о том, всякая ли поверхность постоянной отрицательной кривизны может быть полностью и притом однозначно геодезически отображена на плоскость, и если невозможно полное отображение, то какая часть поверхности такое однозначное отображение допускает. Это обстоятельство, как увидим ниже, оказалось очень важным (см. рубр. 7, 8 настоящего параграфа и рубр. 7 § 59). Но в конце 60-х годов XIX столетия результат, полученный Бельтрами, сыграл весьма важную роль в деле уяснения геометрии Лобачевского.

5. Геометрия поверхностей постоянной отрицательной кривизны. Изложенный результат, как уже сказано, был опубликован Бельтрами в 1865 г. В 60-х годах, как тоже было указано выше, опубликованная переписка Гаусса с Шумахером обратила внимание на работы Лобачевского; многие математики с ними познакомились, в том числе и Бельтрами. Изучив тщательно «Геометрические исследования» Лобачевского, Бельтрами сопоставил их с результатами своих исследований о геодезическом отображении поверхности на плоскость и пришел к весьма замечательному результату, опубликованному им в 1868 г. [11] в мемуаре, заглавие которого

в переводе гласит «Опыт истолкования (интерпретации) неевклидовой геометрии», Бельтрами занялся теми поверхностями, допускающими геодезическое отображение на плоскости, постоянная кривизна которых K имеет отрицательное значение; он назвал такие поверхности псевдосферическими. Обозначая сообразно этому K через $-\frac{1}{k^2}$ и заменяя в формуле (3) координаты X, Y через kx и ky (что не может нарушить линейного характера уравнений геодезических линий), он привел метрическую форму псевдосферической поверхности к виду:

$$ds^2 = k^2 \frac{(1-y^2) dx^2 + (1-x^2) dy^2 + 2xy dx dy}{(1-x^2-y^2)^2}; \quad (7)$$

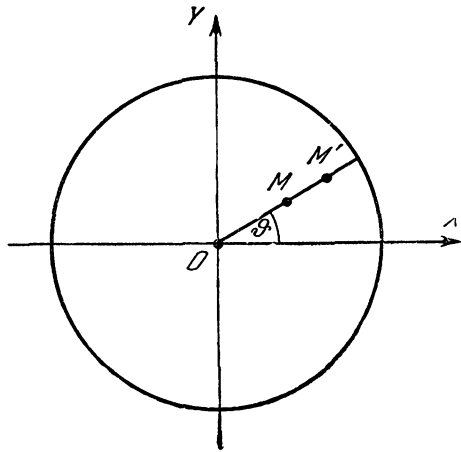
при этом, очевидно, на x, y можно все еще смотреть как на криволинейные координаты точки на поверхности и в то же время как на ортогональные декартовы координаты ее отображения на плоскости. Дискриминант формы (7) равен

$$\frac{k^4}{(1-x^2-y^2)^3}, \quad (8)$$

и так как он должен иметь положительное значение, то

$$x^2 + y^2 < 1. \quad (9)$$

Это значит, что при рассматриваемом геодезическом отображении псевдосферической поверхности на евклидову плоскость каждая точка поверхности изображается точкой, лежащей внутри круга единичного радиуса. Бельтрами допускает, что существует псевдосферическая поверхность, которая вся однозначно отображается на единичный круг в том смысле, что не только каждая точка поверхности изображается одной и только одной точкой этого круга, но и обратно, что каждая внутренняя точка этого круга служит изображением одной и только одной точки поверхности. Более того, Бельтрами пытается это утверждение доказать; однако соображения, которые он с этой целью приводит, доказательной силы не имеют. Все же мы предварительно оставимся при его допущении.



Черт. 2.

Все метрические соотношения, имеющие место на такой поверхности, должны проистекать из ее метрической формы (7).

Пусть O — начало декартовых координат x, y на плоскости (черт. 2), M — произвольная точка внутри бельтрамиевого круга:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0;$$

точки на поверхности и их изображения на бельтрамиевой карте будем обозначать соответственно теми же буквами.

Пусть OM — прямая, проходящая на карте через начало координат; она выражается уравнениями

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta, \quad (10)$$

где r — (переменное) расстояние точки M от начала, ϑ — (постоянный) угол MOX . Теми же уравнениями выражается на поверхности соответствующая геодезическая линия. Элемент MM' прямой (10) на карте определяется дифференциалами

$$dx = dr \cos \vartheta, \quad dy = dr \sin \vartheta. \quad (10a)$$

Если точка M' дальше от центра, чем точка M , то dr совпадает с длиной линейного элемента; соответствующий элемент MM' на поверхности имеет согласно формуле (7) длину

$$ds = k \frac{dr}{1-r^2},$$

и, следовательно, длина геодезической дуги OM на псевдосферической поверхности имеет значение

$$\rho = k \int_0^r \frac{dr}{1-r^2} = \frac{k}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}. \quad (11)$$

Таким образом, когда точка M на карте приближается к периферии круга ($r \rightarrow 1$), то на поверхности расстояние соответствующей точки M от O неограниченно возрастает; это, конечно, соответствует сделанному предположению, что существует поверхность, отображающаяся на всем единичном круге; только по отношению к такой поверхности справедлив этот вывод. Окружность, внутри которой изображена поверхность, можно рассматривать как геометрическое место точек, как бы изображающих «бесконечно удаленные точки» поверхности; Бельтрами называет эту окружность предельной окружностью карты¹⁾; мы эту окружность будем называть граничной окружностью.

Из сказанного следует, что геодезические линии поверхности изображаются хордами граничной окружности. Если две хорды пересекаются, то соответствующие геодезические линии поверхности также пересекаются; если две хорды на карте не пересекаются, то соответствующие геодезические линии вовсе не имеют общих точек — расходятся; наконец, если две хорды пересекаются на граничной окружности, то соответствующие геодезические линии «сходятся в бесконечно удаленной точке поверхности». Соответствующий подсчет показывает, что эти геодезические неограниченно сближаются между собой не пересекаясь. Такие геодезические мы будем называть «параллельными».

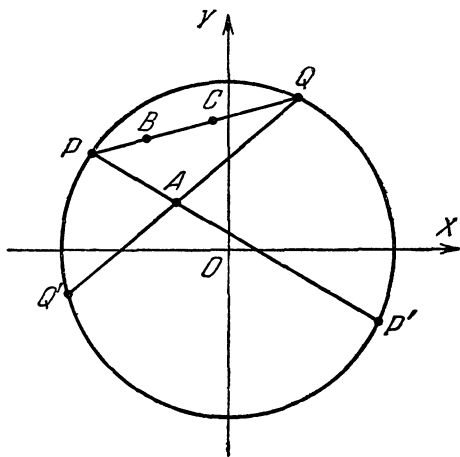
Пусть точка A на поверхности лежит вне геодезической BC . Им соответствует в бельтрамиевом круге точка A и прямая BC (черт. 3). Если прямая BC пересекает предельную окружность в точках P и Q , то хорды, проходящие внутри углов PAQ и $P'AQ'$, пересекают хорду BC ; хорды же, проходящие внутри углов PAQ' и $P'AQ$, хорду BC не пересекают; прямые PAP' и QAQ' отделяют хорды, пересекающие хорду BC , от хорд, не пересекающих BC . Хордам PAP'

¹⁾ Этот термин не следует, конечно, смешивать с «предельной окружностью» на плоскости Лобачевского.

и QAQ' соответствуют на поверхности геодезические того же наименования. Ясно, что геодезические, проходящие на поверхности, внутри углов PAQ и $P'AQ'$ пересекают геодезическую BC , геодезические, проходящие в углах PAQ' и $P'AQ$, не встречаются геодезической BC , а геодезические AP и AQ с двух сторон асимптотически приближаются к BC . Мы имеем на поверхности конфигурацию, которая совпадает с конфигурацией прямых на гиперболической плоскости; геодезические первой категории соответствуют прямым гиперболической плоскости, пересекающим BC ; геодезические второй категории соответствуют прямым, расходящимся с BC ; геодезические AP и AQ соответствуют прямым, «параллельным» BC .

Эти соображения приводят Бельтрами к выводу, что внутренняя геометрия поверхности постоянной отрицательной кривизны совпадает с геометрией гиперболической плоскости.

Этот вывод он обосновывает тем, что метрическая форма псевдосферической поверхности (7) совпадает с основной метрической формой гиперболической плоскости (ч. I, (LXXXII), стр. 364). Внутренняя геометрия как поверхности, так и гиперболической плоскости определяется каждая своей метрической формой, а так как основная метрическая форма в том и в другом случае одна и та же, то внутренняя геометрия псевдосферической поверхности совпадает с геометрией гиперболической плоскости. Бельтрами подтверждает это рядом вычислений, простейшие из которых мы приведем ниже.



Черт. 3.

6. Метрические соотношения на псевдосферических поверхностях.

Если в уравнениях (10) рассматривать r как постоянную, а ϑ как переменный угол, то они выражают (на плоскости) окружность радиуса r , а вместе с тем вследствие соотношения (11) и окружность (на поверхности), имеющую геодезический радиус ρ . Элемент этой окружности на плоскости имеет компоненты

$$dx = -r \sin \vartheta d\vartheta; \quad dy = r \cos \vartheta d\vartheta \quad (12)$$

и длину $r d\vartheta$. Соответствующий элемент на поверхности имеет согласно формуле (7) значение

$$ds = \frac{kr d\vartheta}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Интегрируя это выражение по ϑ от 0 до 2π , получим длину геодезической окружности

$$C = \frac{2\pi kr}{\sqrt{1-r^2}}. \quad (13)$$

Учитывая теперь, что ρ есть геодезический радиус соответствующей

окружности на поверхности, находим по формуле (11):

$$\rho = \frac{k}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}; \quad r = \frac{e^{\frac{\rho}{k}} - e^{-\frac{\rho}{k}}}{e^{\frac{\rho}{k}} + e^{-\frac{\rho}{k}}} = \operatorname{th} \frac{\rho}{k}. \quad (14)$$

Подставляя это значение в формулу (13), получим:

$$C = 2\pi k \operatorname{sh} \frac{\rho}{k}. \quad (15)$$

Это выражение для длины окружности на поверхности постоянной отрицательной кривизны совпадает с выражением (ч. I, (XXV), стр. 310) для длины окружности на гиперболической плоскости в зависимости от радиуса этой окружности, так как $\operatorname{ctg} \Pi(\rho) = \operatorname{sh} \frac{\rho}{k}$ (ч. I, (XXII₁), стр. 294).

Возвращаясь к формуле (7) и относя ее к началу координат: $x=y=0$, получаем для элемента длины, выходящего из начала,

$$ds^2 = k^2(dx^2 + dy^2), \quad \text{т. е.} \quad ds = k ds',$$

где ds' — длина его изображения на бельтрамиевой карте. Таким образом отношение длины элемента к длине его изображения не зависит от направления элемента. Отсюда следует, что изображения двух кривых, выходящих из начала, пересекаются под тем же углом, что и самые кривые. Начало координат при этом изображении поверхности на плоскость есть так называемая точка конформности.

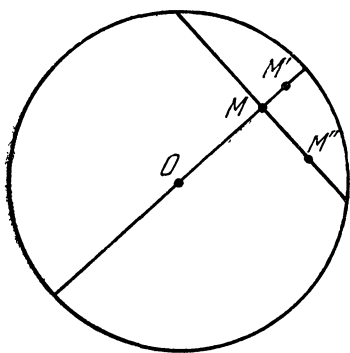
Бельтрами отмечает, что ни в какой другой паре соответственных точек такое соотношение не имеет места, т. е. никакой другой точки конформности это отображение не имеет. Однако одно обстоятельство имеет существенное значение.

Возьмем на поверхности геодезическую, проходящую через начало O , и на ней точку $M(x, y)$ — они изображаются на карте диаметральной прямой OM и точкой $M(x, y)$ (черт. 4), лежащей на ней. При переходе в бесконечно близкую точку M' на той же прямой

координаты получают приращения (10а). Если проведем через точку M хорду, перпендикулярную к прямой OM , и на ней возьмем бесконечно близкую точку M'' , то при переходе от M к M'' координаты получают приращение

$$\delta x = \delta s \sin \vartheta, \quad \delta y = -\delta s \cos \vartheta, \quad (16)$$

где δs — положительное или отрицательное число (по абсолютной величине равное длине отрезка MM'') в зависимости от того, в какую сторону мы по перпендикуляру сдвинулись. Если основная метрическая форма поверхности написана в виде (4), то угол φ между элементами MM' и MM'' на поверхности определяется по известной формуле диф-



Черт. 4.

Ференциальной геометрии равенством

$$ds \delta s \cos \omega = E dx \delta x + F(dx \delta y + dy \delta x) + G dy \delta y. \quad (17)$$

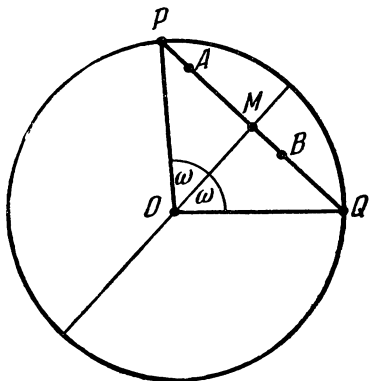
Коэффициенты E, F, G в точке M на нашей поверхности имеют согласно формулам (7) и (10) значения

$$\begin{aligned} E &= k^2 \frac{1-y^2}{(1-x^2-y^2)^2} = k^2 \frac{1-r^2 \sin^2 \vartheta}{(1-r^2)^2}, \\ F &= k^2 \frac{xy}{(1-x^2-y^2)^2} = k^2 \frac{r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{(1-r^2)^2}, \\ G &= k^2 \frac{1-x^2}{(1-x^2-y^2)^2} = k^2 \frac{1-r^2 \cos^2 \vartheta}{(1-r^2)^2}, \end{aligned}$$

подставляя их, а также значения dx, dy из (10а) и $\delta x, \delta y$ из (16) в уравнение (17), найдем, что $\cos \omega = 0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$. Иначе говоря, прямая на карте,

перпендикулярная к диаметральной прямой OM единичного круга, изображает геодезическую линию, перпендикулярную к геодезической OM ; еще иначе, прямой угол между двумя геодезическими, одна из которых проходит через начало, остается прямым при их отображении на карте.

Пусть теперь O — произвольная точка на поверхности. AB — произвольная геодезическая, через нее не проходящая. Приняв O за начало координат, выполним бельтрамиево отображение поверхности на плоскость; точка O на карте будет началом декартовых координат, геодезическая AB изобразится прямой AB , которая пересечет основную окружность в точках P и Q (черт. 5); OM — перпендикуляр из O на прямую AB . Прямые OP и OQ изображают геодезические линии поверхности, которые «параллельны» геодезической линии AB ¹⁾.



Черт. 5.

Перпендикуляр OM изображает геодезическую, перпендикулярную к AB ; так как на карте перпендикуляр OM делит угол POQ пополам, то в силу доказанных предложений геодезическая OM на поверхности перпендикулярна к геодезической AB и делит угол POQ пополам. POM и QOM суть углы параллельности, соответствующие геодезическому отрезку OM . Они равны углам ROM и QOM на карте; обозначим их общую величину через ω . Если перпендикуляр OM на карте имеет длину r , то $r = \cos \omega$. Если через ρ обозначим длину отрезка OM на поверхности, то по формуле (14)

$$e^{\frac{2\rho}{k}} = \frac{1+r}{1-r}.$$

Следовательно,

$$\frac{1 + \cos \omega}{1 - \cos \omega} = e^{\frac{2\rho}{k}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(\rho) = e^{-\frac{\rho}{k}}. \quad (18)$$

Это совпадает с основной формулой Лобачевского (ч. I, (XIII), стр. 294).

¹⁾ «Параллельность» геодезических объяснена выше, см. стр. 18.

Геометрией поверхностей постоянной отрицательной кривизны еще значительно раньше, чем Бельтрами, занимался Ф. Миндинг (F. Minding). Он посвятил этому вопросу три мемуара [12], [13], [14]. В последнем из них, напечатанном в XX томе журнала Крелля, он показал, что стороны и углы геодезического треугольника на поверхности постоянной кривизны $-\frac{1}{k^2}$ связаны тремя уравнениями вида:

$$\operatorname{ch} \frac{c}{k} = \operatorname{ch} \frac{a}{k} \operatorname{ch} \frac{b}{k} - \operatorname{sh} \frac{a}{k} \operatorname{sh} \frac{b}{k} \cos C.$$

Они совпадают с уравнениями (XXI) (ч. I, стр. 290), выражающими так называемую теорему косинусов в гиперболическом пространстве. Располагая уравнением (18), Бельтрами выражает гиперболические функции от $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{c}{k}$ через тригонометрические функции углов $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$ и показывает, что эти уравнения принимают ту форму, в которой они даны Лобачевским (см. ч. I, (XXI'), стр. 298).

«Вышеизложенное, — замечает после этого Бельтрами, — нам кажется, подтверждает во всех отношениях обещанное истолкование неевклидовой геометрии посредством поверхностей постоянной отрицательной кривизны».

«Когда Миндинг сделал в XX томе журнала Крелля свои указания (относительно основных тригонометрических уравнений на поверхности постоянной отрицательной кривизны), — говорит Клейн, — а в XVII томе того же журнала Лобачевский опубликовал свои исследования о воображаемой геометрии, то можно было бы думать, что не понадобится много времени, чтобы выявить связь между этими замечательными результатами, полученными совершенно различным образом. Между тем на это понадобилось целых 30 лет».

После опубликования мемуара Бельтрами его результат формулировали так: геометрия гиперболической плоскости осуществляется на поверхностях постоянной отрицательной кривизны; в этом виде он известен под названием теоремы Бельтрами об интерпретации геометрии гиперболической плоскости. Самое отображение гиперболической плоскости на круг единичного радиуса называют бельтрамиевой интерпретацией гиперболической плоскости.

Устанавливая этот факт, Бельтрами задается вопросом, почему именно на поверхностях постоянной (отрицательной) кривизны оказалось возможным осуществить геометрию Лобачевского. Он объясняет это тем, что геометрия поверхности, так же как и геометрия плоскости и сферы должна разворачиваться методом наложения, а потому требует свободного передвижения ее частей по поверхности¹⁾. Это оказывается возможным лишь на поверхностях постоянной кривизны. Правда, это передвижение сопровождается деформацией передвигаемой части поверхности но при этой деформации сохраняются длины всех линий и величины всех углов—это есть изгибание передвигаемой части поверхности (или даже всей поверхности). Так, любая часть цилиндрической поверхности допускает передвижение по ней, сопровождаемое такой деформацией (изгибанием)

¹⁾ Значение термина «свободное передвижение», которым Бельтрами собственно не пользуется, будет выяснено в следующей главе.

Впечатление, произведенное работой Бельтрами, было громадное. Неевклидова геометрия, казавшаяся почти всем математикам, которые о ней слышали, в лучшем случае, фантастическим измышлением, теперь получила реальное осуществление. Поиски Лобачевского такого доказательства логической правильности гиперболической геометрии, которое не оставляло бы никакого сомнения, теперь, казалось, увенчались полным успехом: гиперболическая геометрия, по крайней мере, планиметрия, получила реальное осуществление в обыкновенном евклидовом пространстве; поэтому о ее противоречивости не могло быть и речи.

7. Дефекты рассуждения Бельтрами. Однако тщательное обсуждение мемуара Бельтрами обнаружило дефекты, вследствие которых этот вывод нельзя считать вполне обоснованным. Все рассуждения Бельтрами основаны на том допущении, что существует такая псевдосферическая поверхность, которая однозначно отображается на весь единичный круг так, что геодезические линии поверхности переходят в прямые. Бельтрами, как уже отмечено выше, даже пытается это утверждение обосновать; однако рассуждения, которые он для этого приводит, ни в коем случае не могут быть признаны достаточными.

Выводы Бельтрами в существе своем основаны на том, что основная метрическая форма псевдосферической поверхности в надлежащих координатах всегда может быть приведена к виду (7); но и на гиперболической плоскости, как мы знаем, ее основная метрическая форма также имеет тот же вид. В том обстоятельстве, что псевдосферическая поверхность и гиперболическая плоскость при надлежащей координатации имеют общую основную метрическую форму, заключается вся суть вывода Бельтрами. Он основывается на том, что внутренняя геометрия поверхности определяется ее метрической формой: при общности метрической формы псевдосферической поверхности и гиперболической плоскости они несут на себе ту же геометрию. Но дело в том, что самое предложение, сформулированное выше, носит локальный характер, т. е. справедливо лишь в некоторой окрестности каждой точки. Чтобы оправдать вывод Бельтрами, нужно найти такую псевдосферическую поверхность, которая по его методу может быть полностью однозначно отображена на весь единичный круг или, что сводится к тому же, на которой геодезические линии, выходящие из одной точки, являются гладкими кривыми и неограниченно простираются в обе стороны. Бельтрами это принимает, но соображения, которыми он старается это оправдать, как уже сказано, нельзя считать убедительными.

8. Прямое доказательство теоремы Бельтрами. В предыдущих рубриках изложен замысел и сохранена цепь рассуждений, которые привели Бельтрами к его замечательной теореме. Однако самое предложение допускает более прямое и более простое доказательство, которое к тому же лучше освещает условия его применимости.

Основная метрическая форма гиперболической плоскости выражается в декартовых координатах формулой (LXXVII) (ч. I, стр. 359):

$$ds^2 = \frac{d\xi^2}{\sin^2 \eta} + d\eta^2 \equiv \text{ch}^2 \frac{\eta}{k} d\xi^2 + d\eta^2. \quad (19)$$

Примем теперь во внимание известное предложение об иммерсии положительной бинарной дифференциальной квадратичной формы в трехмерное евклидово пространство. Оно выражается следующим образом: какова бы ни была определенная положительная бинарная

дифференциальная форма, коэффициенты которой в некоторой окрестности значений независимых переменных $u = u_0$, $v = v_0$ представляют собой аналитические функции от u , v , в евклидовом пространстве всегда существует поверхность $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, отнесенная к координатам u, v в этой окрестности и имеющая данную форму своей метрической формой¹⁾. Следовательно, в евклидовом пространстве существует поверхность, метрическая форма которой в некоторой ее области совпадает с формулой (19). С другой стороны, известно²⁾, что кривизна поверхности, имеющей основную форму $d\eta^2 + G^2 d\xi^2$ (где G — функция от ξ, η), выражается в каждой точке (ξ, η) формулой

$$K = -\frac{1}{G} \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2}.$$

Если поэтому метрическая форма поверхности имеет вид (19), т. е. если $G = \text{ch} \left(\frac{\eta}{k} \right)$, то ее кривизна имеет постоянное значение $-\frac{1}{k^2}$.

Следовательно, в евклидовом пространстве для любого отрицательного значения K существует поверхность, которая в некоторой своей области имеет постоянную кривизну $K = -\frac{1}{k^2}$ и в то же время несет на себе ту же метрическую форму, что и гиперболическая плоскость кривизны $-\frac{1}{k^2}$. По существу, это все, что можно считать строго установленным теоремой Бельтрами.

Однако в этой формулировке с особой ясностью выступает тот факт, что геометрия поверхности постоянной отрицательной кривизны вообще только в некоторой области совпадает с геометрией гиперболической плоскости. Отсюда возникла тенденция выяснить, существует ли такая псевдосферическая поверхность, на которой геометрия Лобачевского осуществляется полностью.

§ 59. ПСЕВДОСФЕРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

1. Поверхности вращения постоянной кривизны. Выше было указано, что изучением поверхностей постоянной отрицательной кривизны до Бельтрами занимался уже Миндинг. Он не только установил метрические соотношения (тригонометрию) этих поверхностей, но указал впервые поверхности этого типа. Он рассматривал уже поверхности вращения постоянной кривизны, нашел также винтовую поверхность (в расширенном значении этого термина) постоянной отрицательной кривизны.

После появления работы Бельтрами [3], естественно, возникло стремление разыскать по возможности все поверхности постоянной кривизны. Этот вопрос представлял интерес с точки зрения классической дифференциальной геометрии; он представлял теперь интерес и с точки зрения неевклидовой геометрии: в соответствии с возникшими сомнениями было важно выяснить, существует ли такая поверхность постоянной отрицательной кривизны, которая полностью отображается на единственный круг.

¹⁾ См. В. Каган [8], т. I, стр. 191.

²⁾ См. В. Каган [8], т. I, стр. 351.

Если поверхность задана в ортогональных декартовых координатах уравнением $z = \varphi(x, y)$, то ее кривизна¹⁾, как показал еще Гаусс, выражается формулой

$$K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}, \quad (1)$$

где p, q, r, s, t , как обыкновенно, обозначают частные производные первого и второго порядка координаты z по x и y . Если придать K постоянное значение, то равенство (1) можно рассматривать как уравнение в частных производных, определяющее те поверхности, которые имеют эту постоянную кривизну K ; разыскать такие поверхности означало проинтегрировать это уравнение. Однако очень скоро было выяснено, что выполнить это интегрирование (в элементарных функциях, как это тогда понимали)—задача неосуществимая. Стали искать частные случаи, при которых интегрирование выполняется. Как сказано выше, уже Миндинг в цитированном мемуаре [12] поставил себе задачей разыскать поверхности вращения постоянной кривизны. При этом дополнительным условием уравнение (1) упрощается и допускает интегрирование. Оно в этом случае заменяется обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, первый интеграл которого находится без всякого труда.

Этим же вопросом занимался Дини (U. Dini [15]). Он ставил себе целью разыскать меридиан, при вращении которого вокруг оси получается поверхность постоянной кривизны. Выражая это требование, получаем для меридиана обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, которое может быть проинтегрировано в эллиптических функциях. Качественное исследование меридиана может быть выполнено без второго интегрирования, т. е. при посредстве первого интеграла, который получается очень просто. Эта небольшая теория в настоящее время излагается во всех обстоятельных курсах дифференциальной геометрии, в частности, на русском языке ее можно найти в руководствах С. П. Финикова [16], В. Ф. Кагана [8] и др. Поэтому резюмируем только результаты этой теории, которые нужны для нашей цели.

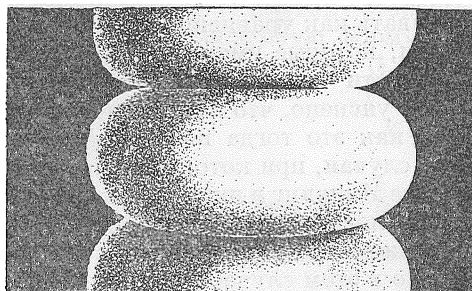
2. Классификация поверхностей вращения постоянной отрицательной кривизны. Напомним, что поверхность имеет в некоторой ее точке положительную кривизну, если так называемые главные ее сечения в этой точке расположены по одну сторону касательной плоскости,—и отрицательную кривизну, если эти сечения расположены по разные стороны касательной плоскости. Псевдосферическая поверхность имеет в окрестности каждой точки седлообразную форму. Чтобы поверхность вращения имела положительную кривизну, меридиан должен быть обращен к оси вращения своей вогнутостью. В случае поверхности постоянной положительной кривизны меридианы (а вместе с тем и самые поверхности) бывают трех типов.

Поверхность первого типа изображена на черт. 6. Меридиан (черт. 7) состоит из периодически повторяющихся ветвей, не доходящих до оси вращения; две смежные ветви, сходясь, образуют точку возврата, которая при вращении описывает параллель; она представляет ребро возврата самой поверхности. Поверхность состоит, таким образом,

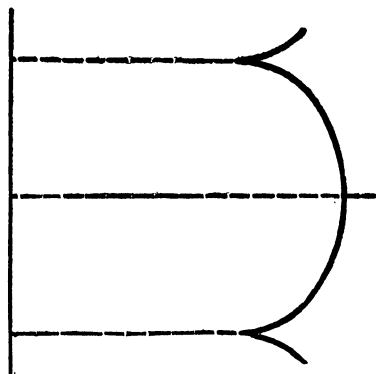
¹⁾ В настоящем сочинении мы под «кривизной» поверхности в заданной на ней точке всегда разумеем так называемую гауссову кривизну; лучше называть ее внутренней кривизной, так как она сохраняет свое значение при изгибании поверхности.

из периодически повторяющихся полостей, каждая из которых разворачивается на зону сферы той же кривизны, не покрывая сферы целиком, но огибая зону больше одного раза.

Поверхность второго типа изображена на черт. 8. Меридиан (черт. 9) также состоит из периодически повторяющихся ветвей, которые также



Черт. 6.

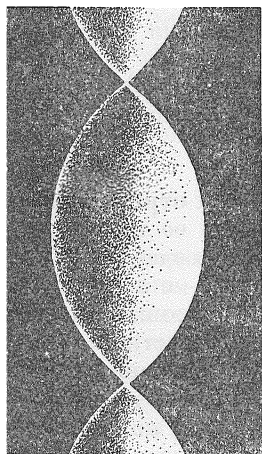


Черт. 7.

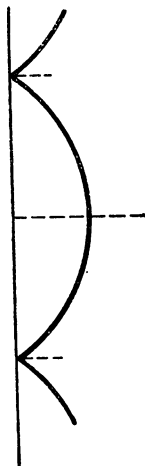
сходятся, образуя точки заострения, лежащие в этом случае на оси вращения. В такой точке меридиан пересекает ось вращения под острым углом; на поверхности образуется поэтому коническая точка. Если полость разрезать по меридиану, то она может быть раз-

вернута на сферу той же кривизны; она пройдет при этом от одного полюса к другому, но покроеет не всю сферу, а вырезок, содержащийся между двумя меридианами.

Поверхность третьего типа есть сфера. Она может быть рассматриваема как промежуточный, предельно переходный случай от первого типа ко второму. Меридиан состоит из полуокружностей; две последовательные ветви меридиана соприкасаются в точке возврата, лежащей на оси вращения, но не пересекают ее под прямым углом; при вращении поэтому не образуется конической точки, каждая полость представляет собой сферу—поверхность, не имеющую никаких особенных точек.



Черт. 8.



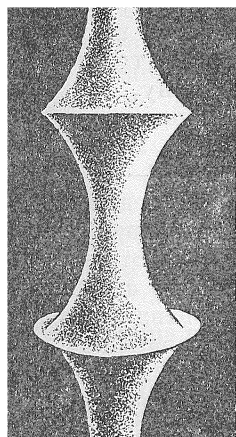
Черт. 9.

Поверхность вращения отрицательной кривизны образуется в том случае, когда меридиан обращен к оси вращения выпуклостью. В случае постоянной отрицательной кривизны эти поверхности также бывают трех типов.

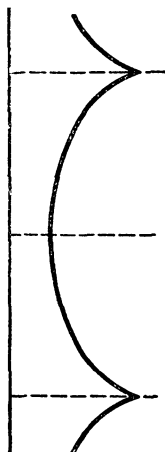
Поверхность первого типа изображена на черт. 10. Меридиан (черт. 11) здесь также состоит из периодически повторяющихся ветвей, две смежные ветви при схождении образуют точку возврата, которая при вращении описывает ребро возврата поверхности. Меридиан

не доходит до оси вращения, поверхность состоит из бесчисленного множества зон—полос, каждая из которых содержится между двумя ребрами.

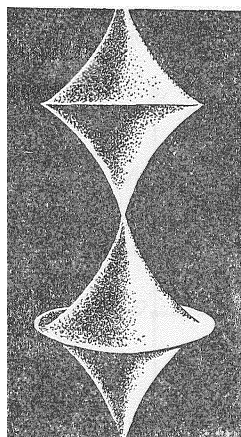
У поверхностей второго типа (черт. 12) две ветви меридиана (черт. 13), сходясь, тоже образуют при вращении ребро возврата; при этом



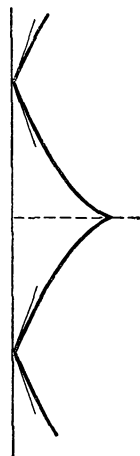
Черт. 10.



Черт. 11.



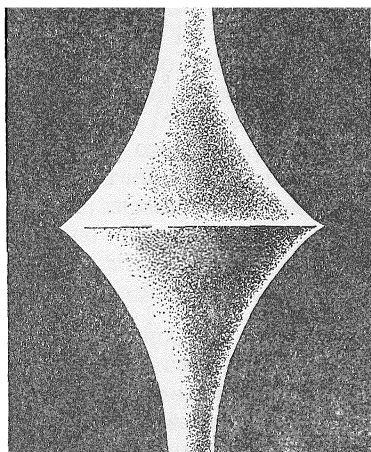
Черт. 12.



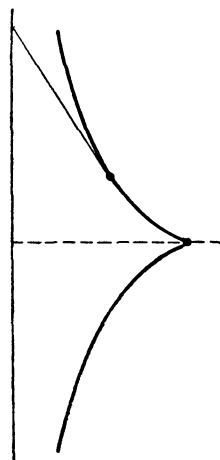
Черт. 13.

каждая ветвь доходит до оси вращения и при вращении образуется с каждой стороны от ребра возврата коническая точка поверхности.

Однако и в случае поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны существует поверхность третьего типа (черт. 14), которая



Черт. 14.

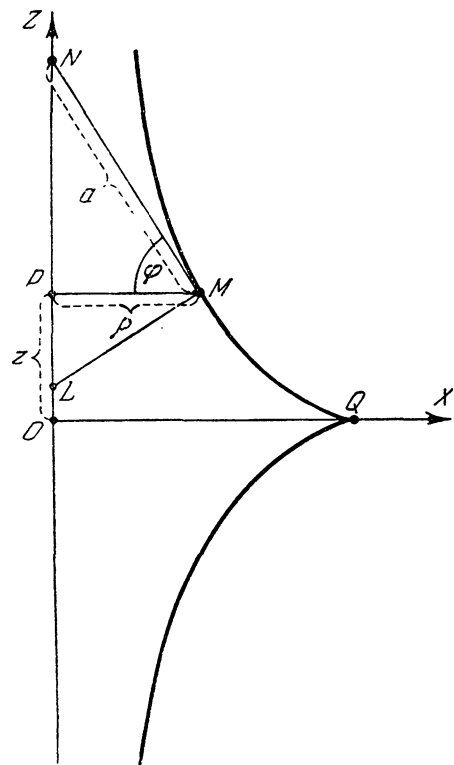


Черт. 15.

впервые была указана Бельтрами и названа им псевдосферой^[17]. Меридиан (черт. 15) состоит в этом случае только из двух ветвей, асимптотически приближающихся к оси вращения и составляющих

вместе так называемую трактриссу¹⁾. Из всех поверхностей постоянной отрицательной кривизны, которыми пользовались для иллюстрации гиперболической геометрии, псевдосфера привлекла наибольшее внимание; мы на ней остановимся несколько подробнее.

3. Псевдосфера. Трактрисса есть плоская кривая, которая характеризуется тем, что длина отрезка касательной, проведенной в любой ее точке, от точки касания до встречи с некоторой постоянной прямой, именуемой осью трактриссы, имеет постоянную длину.



Черт. 16.

Если ось трактриссы примем за ось Z (черт. 16), а перпендикулярную к ней прямую — за ось X , в точке M кривой проведем к ней касательную MN до пересечения с осью Z в точке N , то отрезок MN имеет постоянную длину a ; длина же отрезка $MP = \rho$, перпендикулярного к оси Z , есть радиус параллели, на которой лежит точка M ; через φ обозначим угол PMN , который касательная MN образует с направлением MP . На z и ρ можно смотреть, как на абсциссу и ординату точки M в плоскости меридиана ZOQ ; вместе с тем

$$\rho = a \cos \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{dz}{d\rho}. \quad (2)$$

Исключая из этих уравнений угол φ , получим:

$$\begin{aligned} dz &= -\frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho} d\rho = \\ &= \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} - \frac{a^2 d\rho}{\rho \sqrt{a^2 - \rho^2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Интегрируя это уравнение и выбрав начало координат на такой высоте,

которой соответствует наибольшее значение абсциссы ($OQ = a$), получим уравнение верхней ветви трактриссы

$$z = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho} - \sqrt{a^2 - \rho^2}. \quad (4)$$

Для нижней ветви нужно знак радикала в обоих членах переменить на обратный. Из формулы (3) видим, что в точке Q ($\rho = a$) кривая касается оси абсцисс и с положительной стороны оси Z асимптотически к ней приближается, когда ρ стремится к нулю. С противоположной стороны от оси абсцисс расположена вторая ветвь кривой, симметричная первой, которая встречается с первой в точке Q , образуя в ней точку возврата. При вращении вокруг оси Z получается поверхность, состоящая из двух пол, отделенных одна от другой ребром возврата.

¹⁾ Открытие трактриссы приписывают Гюйгенсу. Исторические сведения о ней, а также подробное исследование этой кривой можно найти в книге Лориа (G. Loria, [18]).

Вычислим теперь кривизны главных сечений в точке M . Одно из этих сечений совпадает с меридианом и имеет кривизну

$$k_1 = -\frac{d^2z}{d\rho^2} : \left[1 + \left(\frac{dz}{d\rho} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} = -\frac{\rho}{a \sqrt{a^2 - \rho^2}}.$$

Знак минус взят в соответствии с тем, что кривая обращена к оси Z выпуклостью. Что касается радиуса кривизны второго нормального сечения, то он, как всегда у поверхности вращения (по теореме Менье), равен длине нормали ML к меридиану от точки M до пересечения с осью Z в точке L . Но

$$ML = \frac{\rho}{\sin \varphi} = \frac{a\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}.$$

Таким образом кривизна поверхности имеет постоянное отрицательное значение $-\frac{1}{a^2}$.

4. Площадь псевдосферы и ограниченный ею объем. Особенная роль псевдосферы среди поверхностей постоянной отрицательной кривизны привлекла к ней внимание геометров. Ей посвящено немало работ; обстоятельная монография о псевдосфере принадлежит Шиллингу (F. Schilling^[19]). Мы приведем здесь вычисление простейших величин, связанных с этой поверхностью.

Отнесем псевдосферу к ортогональным декартовым координатам, поместив начало в центре круга, отделяющего две ее полости (ребра возврата); сечение плоскостью ZOX изображено на черт. 17. Пусть M и M' будут две бесконечно близкие точки на меридиане; проходящие через них параллели радиусов $PM(\rho)$ и $P'M'(\rho + d\rho)$ вырежут бесконечно малую зону, которую можно рассматривать как боковую поверхность усеченного конуса и ее площадь принимать за элемент площади псевдосферы. Радиусы оснований этого усеченного конуса равны ρ и $\rho + d\rho$, а площадь его боковой поверхности $d\sigma = \pi(2\rho + d\rho)ds$, где ds — элемент длины меридиана MM' . Опуская бесконечно малые порядка выше первого, можем положить

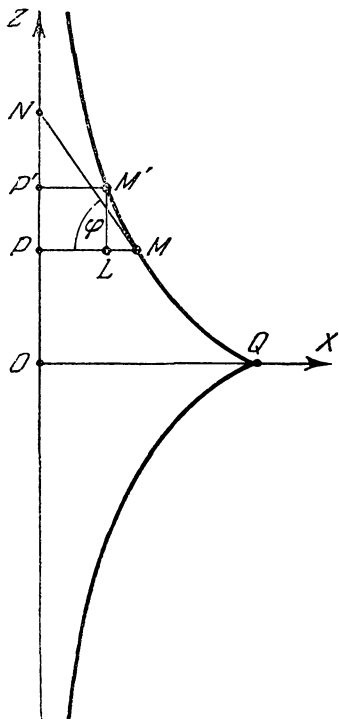
$$d\sigma = 2\pi\rho ds.$$

При продвижении по оси Z вверх от начала ρ убывает и $d\rho$ имеет отрицательное значение. Учитывая это, имеем из прямоугольного треугольника $MM'L$, в котором угол LMM' можно считать в пределах учитываемой точности равным φ :

$$ds = -\frac{d\rho}{\cos \varphi}.$$

Поэтому в силу формулы (2)

$$d\sigma = -2\pi a d\rho, \quad \sigma = 2\pi a \int_0^a d\rho = 2\pi a^2.$$



Черт. 17.

Это и непосредственно следует из того, что за ортогональные декартовы координаты точки M на псевдосфере можно принять

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z.$$

С другой стороны, из равенства (3) следует, что

$$dz^2 + d\rho^2 = \frac{a^2 d\rho^2}{\rho^2}$$

и потому

$$ds^2 = \rho^2 d\theta^2 + \frac{a^2 d\rho^2}{\rho^2}. \quad (6)$$

Таково выражение основной метрической формы псевдосферы в координатах ρ и θ , которыми точки псевдосферы (на одной ее полости) определяются однозначно.

Мы введем, однако, на псевдосфере новые координаты, полагая

$$\xi = a\theta, \quad \eta = \frac{a^2}{\rho}, \quad \text{т. е. } \theta = \frac{\xi}{a}, \quad \rho = \frac{a^2}{\eta}; \quad (7)$$

их геометрический смысл сейчас выяснится. Вследствие этих соотношений

$$d\theta = \frac{d\xi}{a}, \quad d\rho = -\frac{a^2 d\eta}{\eta^2}. \quad (8)$$

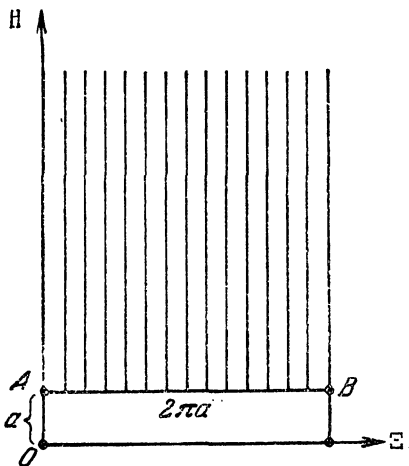
Поэтому формула (6) дает:

$$ds^2 = \frac{a^2 (d\xi^2 + d\eta^2)}{\eta^2}, \quad ds = \frac{a}{\eta} \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}. \quad (9)$$

Этот результат ведет к заключениям двоякого рода.

Здесь ξ и η суть своеобразные координаты на псевдосфере. Теперь каждой точке $M(\xi, \eta)$ псевдосферы отнесем в качестве соответствующей точку M на евклидовой плоскости, имеющую ортогональными декартовыми координатами те же числа ξ, η . Псевдосфера будет, таким образом, отображена на евклидову плоскость. Дадим себе отчет о геометрическом характере этого отображения.

По форме элемента длины (9) мы видим, что это отображение конформное (см. ч. I, (LXXXV), стр. 366). Далее, поскольку θ в уравнении (7) меняется от 0 до 2π , то координата ξ меняется от 0 до $2\pi a$; что касается η , то наименьшее его значение (при $\rho = a$) равно a ; далее это значение неограниченно возрастает при убывании ρ . Вся псевдосфера, таким образом, отображается на прямоугольную полосу (черт. 19), имеющую основанием отрезок AB , параллельный оси абсцисс, длины



Черт. 19.

$2\pi a$; это отображение будет однозначным для всех точек, кроме тех, которые лежат на меридиане долготы 0 (или 2π). По этому меридиану как бы произойдет разрез; он отобразится двумя граничными прямыми полосами: псевдосфера имеет другую топологическую структуру, чем ее изображение на карте.

Рассматриваемое отображение вообще не будет геодезическим, как мы это сейчас покажем. Но кривые $\theta = c$ (меридианы), как видно из уравнения (7), выражаются прямыми $\xi = ac$, параллельными оси ординат; эти геодезические изображаются прямыми. Вследствие конформности отображения прямыми также изображаются ортогональные траектории меридианов поверхности — параллельные круги.

Винтовой линией на псевдосфере называют кривую, пересекающую все меридианы под постоянным углом. Вследствие конформности отображения винтовые линии псевдосферы изображаются прямыми на плоскости; при этом винтовые линии, образующие с меридианом один и тот же угол, изображаются параллельными прямыми, как показано на черт. 20.

Обращаясь к геодезическим, заметим, что те из них, которые не сохраняют постоянным значение θ (не меридианы), определяются дифференциальным уравнением (5) предыдущего параграфа (стр. 15). Так как в рассматриваемом случае

$$E = G = \frac{a^2}{\eta^2}, \quad F = 0$$

(координата ортогональная), то это уравнение очень упрощается, принимая вид:

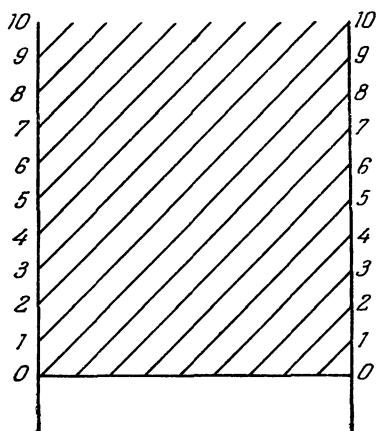
$$\eta \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 + 1 = 0,$$

т. е.

$$\frac{d}{d\xi} \left(\eta \frac{d\eta}{d\xi} \right) + 1 = 0.$$

Интегрируя его, получаем:

$$\eta \frac{d\eta}{d\xi} + (\xi - c_1) = 0, \quad \eta^2 + (\xi - c_1)^2 = c_2.$$



Черт. 20.

Так как тем же уравнением выражается изображение каждой геодезической на евклидовой плоскости, то геодезические линии псевдосферы изображаются окружностями, центры которых лежат на оси абсцисс, и прямыми, перпендикулярными к оси абсцисс (изображающими меридианы псевдосферы). Этим отображением нам ниже придется заниматься подробно.

6. Отображение псевдосферы на гиперболическую плоскость. Теперь заметим, что выражение основной метрической формы псевдосферы (9) совпадает с выражением основной метрической формы гиперболической плоскости в орициклических координатах (ч. I, (LXXXV), стр. 366). Координатными линиями на гиперболической плоскости служат при этом пучок параллельных прямых, изображающих меридианы псевдосферы и их ортогональные траектории, т. е. предельные линии. Вся псевдосфера (вернее, ее половина) отображается на полосе, содержащейся между двумя параллелями и ортогональной им предельной дугой. Однако то обстоятельство, что псевдосфера отображается только на часть гиперболической плоскости, нарушает замысел Бельтрами, по которому геометрия поверхности постоянной отрицательной кривизны совпадает с геометрией всей гиперболической плоскости.

7. Разыскание других поверхностей постоянной отрицательной кривизны. После Бельтрами геометрией поверхностей постоянной отрицательной кривизны занимались очень многие геометры, по с точки зрения чисто дифференциально-геометрической. С точки зрения гиперболической геометрии интерес представляли две темы. Первая из них заключалась в том, чтобы метрические соотношения псевдосферической поверхности действительно вывести из ее основной метрической формы и таким образом непосредственно обнаружить, что она—по крайней мере, локально, на ограниченной части поверхности,—действительно совпадает с метрикой гиперболической плоскости. Как было упомянуто выше, это собственно было уже сделано Миндингом, позднее—Бельтрами. Очень удачно это выполнено Эшерихом (G. Escherich, [20]); вывод Эшериха с небольшими изменениями воспроизведен В. Ф. Каганом¹⁾.

Более важное значение, как это явствует из предыдущего, имела другая задача—разыскать такую поверхность постоянной отрицательной кривизны, на которой осуществлялась бы геометрия всей гиперболической плоскости. Найти такую поверхность значило бы окончательно доказать логическую безупречность плоской гиперболической геометрии во всей ее полноте.

Было сделано немало усилий для решения этой задачи. Были найдены новые псевдосферические поверхности, среди которых, повидимому, наиболее интересна (открытая еще Миндингом, но независимо от него вновь найденная Дини [15]) винтовая поверхность (в обобщенном смысле слова) постоянной отрицательной кривизны. Но все эти поверхности имели те или иные особые точки или ребра возврата и уже поэтому во всяком случае не позволяли применить к ним в целом предложения дифференциальной геометрии: осуществить на них полностью гиперболическую планиметрию было невозможно.

В 1900 г. в Париже на Первом всемирном математическом конгрессе Д. Гильберт произнес речь «Математические проблемы» [21], в которой он наметил 32 проблемы, насущно нуждавшиеся в решении. Некоторые из них не решены и до настоящего времени. Одна из этих проблем заключалась в том, чтобы установить, существует ли регулярная на всем своем протяжении поверхность постоянной отрицательной кривизны, на которой осуществляется геометрия всей гиперболической плоскости. В следующем же (1901) году Гильберт сам опубликовал мемуар [22], содержащий решение этого вопроса; он обнаружил, что таких поверхностей не существует.

Не входя в детали, мы хотели бы дать ясное представление о доказательстве этой важной теоремы. Для его осуществления необходимо было, конечно, воспользоваться таким свойством, которое характерно для поверхностей отрицательной кривизны. Таким признаком является та их особенность, что из каждой точки всякой псевдосферической поверхности выходят две действительные асимптотические линии. Две системы асимптотических линий Гильберт принимает за координатные линии специальной асимптотической координатной системы (u, v) . Именно, взяв две произвольные асимптоты OU и OV (черт. 24) различных систем за начальные, он принимает за координаты (u, v) точки M длины MP и MQ дуг двух асимптотических, выходящих из точки M , до пересечения с начальными в точках P и Q . При этой так называемой лонгальной координатной системе коэффициенты E и G метрической формы поверхности

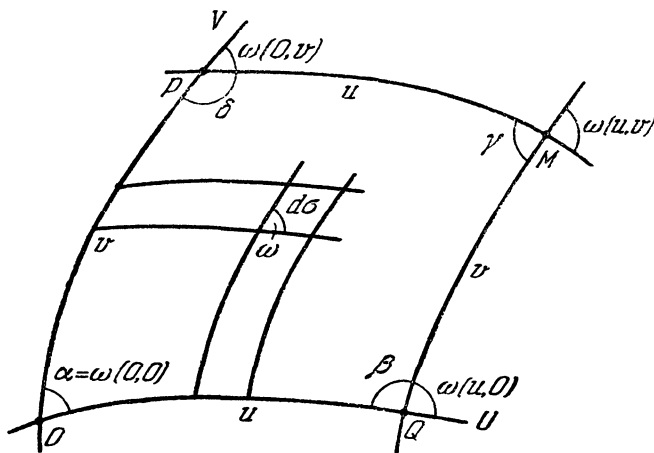
$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \quad (10)$$

¹⁾ [8], т. II, § 58, рубр. 3, 4, стр. 81—84.

равны единице, ибо при постоянном v $ds = du$ и при постоянном u $ds = dv$. А так как угол между координатными линиями определяется формулой $\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}$, то при лонгальной координации $\cos \omega = F$ и форма (10) принимает вид

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \omega du dv + dv^2. \quad (11)$$

Если выразить кривизну поверхности через коэффициенты ее метрической формы (11)¹⁾ и принять во внимание, что в рассматриваемом слу-



Черт. 21.

чае она имеет постоянное значение $-\frac{1}{k^2}$, то получим основное соотношение, на котором основан вывод теоремы Гильберта:

$$\sin \omega = k^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v}. \quad (12)$$

Особенность асимптотической координации в рассматриваемом случае заключается в том, что координатный четырехугольник всегда чебышевский, т. е. длины противоположных сторон всегда равны: $OP = QM = v$, $OQ = PM = u$; точка P имеет, таким образом, координаты $(0, v)$, точка Q —координаты $(u, 0)$.

Но, как известно, элемент площади

$$d\sigma = du dv \sin \omega,$$

т. е. в нашей координации

$$d\sigma = k^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} du dv,$$

¹⁾ Удобно воспользоваться формулой

$$K = -\frac{1}{4\Delta^4} \begin{vmatrix} E_u & E_v \\ F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} - \frac{1}{2\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial v} \frac{E_v - F_u}{\Delta} - \frac{\partial}{\partial u} \frac{F_v - G_u}{\Delta} \right),$$

где $\Delta = \sqrt{EG - F^2}$.

а площадь всего четырехугольника

$$\sigma = k^2 \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} du dv = k^2 [\omega(u, v) - \omega(u, 0) - \omega(0, v) + \omega(0, 0)].$$

Если углы асимптотического четырехугольника обозначим через α , β , γ , δ , как указано на чертеже, то

$$\omega(0, 0) = \alpha, \quad \omega(u, 0) = \pi - \beta, \quad \omega(0, v) = \pi - \delta, \quad \omega(u, v) = \gamma$$

и потому площадь асимптотического четырехугольника определится формулой

$$\sigma = k^2 (\alpha + \beta + \gamma + \delta - 2\pi). \quad (13)$$

Мы приходим, таким образом, к следующей теореме: на поверхности постоянной отрицательной кривизны сумма внутренних углов асимптотического четырехугольника всегда больше 2π , а его площадь пропорциональна угловому избытку $(S - 2\pi)$. Но каждый из четырех его углов не превышает π ; поэтому площадь четырехугольника не превышает $2\pi k^2$. А так как при сделанных предположениях каждая из асимптотических координат меняется от $-\infty$ до $+\infty$, то асимптотический четырехугольник можно всегда взять настолько большим, чтобы он охватил любую замкнутую часть поверхности; отсюда можно заключить, что площадь любой части псевдосферической поверхности постоянной кривизны $-\frac{1}{k^2}$ не превышает $2\pi k^2$.

С другой стороны, поверхность постоянной отрицательной кривизны несет на себе гиперболическую геометрию; если бы она имела неограниченное протяжение и на всем протяжении была бы регулярна, то на ней, как и на плоскости Лобачевского, площадь круга неограниченно возрастала бы с возрастанием радиуса (ч. I, (XIII₂), стр. 374).

Мы приходим, таким образом, к противоречию, которое можно объяснить только сделанным допущением, что существует поверхность постоянной отрицательной кривизны, регулярная на неограниченном протяжении. Это допущение, таким образом, неправильно, т. е. регулярная поверхность постоянной отрицательной кривизны неограниченного протяжения существовать не может. В этом и заключается вывод Гильберта.

Чтобы изложенное доказательство было безукоризненным, необходимо установить ряд предварительных теорем. Нужно показать, что асимптотическая линия на поверхности постоянной отрицательной кривизны не может быть ни замкнутой, ни самопересекающейся; что возможно отчетливое разбиение совокупности асимптотических; что любые две асимптотические одной системы не встречаются, а две асимптотические различных систем всегда пересекаются в одной и только в одной точке, так что две пары асимптотических различных систем всегда образуют четырехугольник, о котором идет речь в доказательстве; что такой четырехугольник действительно может охватить любую замкнутую часть поверхности. Гильберт привел доказательства всех этих теорем; но соображения, посредством которых он эти доказательства проводит, не только были лишены наглядности, но и вызывали прямые возражения.

В 1902 г. норвежский математик Гольмгрен (E. Holmgren [23]) дал другое доказательство того же предложения, также опирающееся на дифференциальное соотношение (12), но носящее более выдержанный

аналитический характер. Гильберт воспроизвел его с небольшой модификацией в последнем (седьмом) издании своих «Оснований»; оно вошло и в русское издание [24]. Справедливость теоремы Гильберта никаких теперь уже сомнений не вызывает.

Вопрос можно считать в настоящее время совершенно исчерпанным. Мемуар Бельтрами сыграл в истории неевклидовой геометрии чрезвычайно важную роль; он обнаружил, что гиперболическая планиметрия локально (частично) осуществляется в евклидовом пространстве; считать неевклидову геометрию фантастическим измышлением стало невозможно; создалось общее всем математикам ощущение ее правильности. Но исчерпывающего объективного доказательства ее логической достоверности даже для двумерной области (для плоскости) еще не существовало; это принесли дальнейшие исследования. Однако работа Бельтрами имела для них решающее значение.

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ ГЕОМЕТРИЯ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

§ 60. ЭРЛАНГЕНСКАЯ ПРОГРАММА

1. **Отображение гиперболической плоскости на евклидову.** Результаты исследований Бельтрами, опубликованные в указанных выше двух его мемуарах [9], [11], могут быть сформулированы следующим образом. В евклидовом пространстве всякая поверхность постоянной кривизны, в частности, всякая псевдосферическая поверхность, допускает взаимно однозначное геодезическое отображение на плоскость, однако локально, т. е. только некоторая часть этой поверхности взаимно однозначно отображается на некоторую часть плоскости. С другой стороны, гиперболическая плоскость допускает, также локально, геодезическое отображение на псевдосферическую поверхность. Отсюда прямой вывод, что гиперболическая плоскость, во всяком случае в некоторой своей части, геодезически отображается на евклидову плоскость. Сейчас, когда гиперболическая геометрия нами уже построена, совершенно ясно, как это отображение осуществляется: в гиперболической плоскости устанавливаются бельтрамиевы координаты, как это сделано выше в § 42 (ч. I, стр. 329); каждой точке (x, y) гиперболической плоскости мы относим в качестве ее изображения точку евклидовой плоскости, для которой те же значения служат ортогональными декартовыми координатами. И так как бельтрамиевы координаты x, y удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 < 1$, то вся гиперболическая плоскость отображается внутрь единичного круга совершенно так же, как по замыслу Бельтрами внутрь такого же круга отображается псевдосферическая поверхность. При этом внутри круга получается та же конфигурация, которая была описана Бельтрами и которая совпадает с расположением прямых на гиперболической плоскости. Ее часто называют б е л ь т р а м и е в о й к а р т о й гиперболической плоскости. Эта мысль, содержащаяся уже в мемуаре Бельтрами, была развита Ф. Клейном и изложена им в двух мемуарах [25] и [26], опубликованных в 1871 г. В этом изложении псевдосфера элиминирована вовсе; геометрия гиперболической плоскости непосредственно осуществляется в евклидовой плоскости внутри единичного круга. Придерживаясь терминологии Бельтрами, можно рассматривать это построение как интерпретацию гиперболической плоскости на евклидовой; при этом прямые гиперболической плоскости изображаются прямыми евклидовой плоскости, точнее, хордами граничной (единичной) окружности. Клейн подробно развивает эту интерпретацию; его построение будет обстоятельно воспроизведено ниже. Здесь же мы предварительно остановимся на двух принципиальных вопросах, разрешение которых составляет главную заслугу Клейна. Во-первых, говорить об интерпретации гиперболической плоскости на евклидовой, строго говоря, можно только

в предположении, что гиперболическая плоскость существует, что ее геометрия логически безупречна. Самое построение, поскольку оно основано на работе Бельтрами, таким образом уже предполагает именно то, что еще нужно только доказать; получается как бы ложный круг; его нужно избежать. Во-вторых, интерпретация требует истолкования всех понятий, которыми геометрия оперирует; возникает, в частности, вопрос о том, как при этой схеме интерпретируется движение. Решение этих двух вопросов привело к новому взгляду на построение геометрии и дало ответ на вопрос о логической безупречности геометрии Лобачевского.

2. Интерпретация геометрического движения. Последний вопрос не мог оставаться незамеченным. С самого возникновения идеи об интерпретации перед Клейном естественно встал вопрос о том, как интерпретировать геометрическое движение при указанном им истолковании неевклидовой геометрии. Впрочем, в замысле Бельтрами этот вопрос, как мы на этом останавливались уже выше, решался очень просто и естественно. Как Бельтрами, так и его ближайшие последователи представляли себе движение на псевдосферической поверхности как такое перемещение некоторой ее части по псевдосферической поверхности, при котором сохраняются длины любых дуг, принадлежащих этому участку. При таком «движении» участок поверхности, конечно, деформируется, но при этом сохраняются не только длины дуг, но и углы, образованные двумя дугами, принадлежащими передвигающемуся участку поверхности, а также и площади фигур, ограниченных какой-либо замкнутой линией. Иначе говоря, такое движение сопровождается «изгибанием» передвигаемого участка, т. е. такой его деформацией, при которой сохраняется («остается инвариантной») его основная метрическая форма, а вместе с нею (напомним основную теорему Гаусса—*theorema egregium*, доказанную им в известном мемюаре «*Disquisitiones generales...*»^[21]) сохранится в каждой точке передвигаемого участка «полная кривизна» поверхности.

Если поэтому некоторая поверхность допускает такое «движение» на ней, что любая ее точка может быть переведена в любую другую ее точку, то такая поверхность во всех точках имеет одну и ту же кривизну, т. е. это есть поверхность постоянной кривизны. Миндинг^[12] доказал и обратное предложение. Он показал, что на всякой поверхности постоянной кривизны возможно такое «движение» и притом с тремя степенями свободы; точнее, на каждой поверхности постоянной кривизны возможно «передвижение» всей поверхности или любой ее части, при котором любая точка поверхности может переместиться в любую другую ее точку, а при неподвижности какой-либо точки (при вращении вокруг точки)—любое выходящее из нее направление может перейти в любое другое направление. Это именно те законы движения, которые господствуют на плоскости и на которых основывается применение понятия движения в планиметрии. Для простейших поверхностей возможность «движения» усматривается из наглядных соображений. Так, на цилиндре любая его часть может быть перемещена («передвинута») по цилиндру с соблюдением указанных выше требований. Миндинг при помощи очень простых соображений показал, как мы только что сказали, что такое же «передвижение» фигуры возможно на любой поверхности постоянной кривизны. Вместе с тем совершенно ясно, что такие движения возможны, в частности, и на всякой псевдосферической поверхности; и эти именно движения участка псевдосферической поверхности, сопровождаемые изгибанием, заменяют обыкновенные движения на плоскости.

Но когда Клейн вовсе отказался от посредствующей роли псевдосферической геометрии, когда он стал непосредственно отображать гиперболическую плоскость на евклидову, вопрос о том, как при этом интерпретируются движения гиперболической плоскости, потребовал определенного и точного ответа. Размышления над этим вопросом привели Клейна к идеям, которые несомненно сыграли руководящую роль в дальнейшем развитии взглядов на обоснование геометрии. Эти взгляды, получившие уже выражение в указанных двух мемуарах Клейна, в общей постановке изложены им в работе, известной под названием «Эрлангенской программы» [28].

3. Основная задача Эрлангенской программы. Летом 1870 г., а также весной и осенью 1871 г. Клейн, как он сам об этом рассказывает в I томе Собрания сочинений в предисловии к «Эрлангенской программе», находился в тесном общении с молодым талантливым норвежским математиком Софусом Ли (S. Lie). В этом общении сложились те идеи, о которых мы упомянули. В 1872 г. Клейн был приглашен профессором в Эрлангенскую высшую политехническую школу; согласно установившейся в Германии традиции он при этом должен был прочесть вступительную лекцию программного характера. Такого рода лекции и назывались в Германии программами. Вступительная лекция Клейна называлась «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований» и получила в дальнейшем известность под названием «Эрлангенской программы». Она была в том же 1872 г. опубликована отдельной брошюрой, которая, однако, не получила широкого распространения. Только в 1893 г. она была переиздана, вернее, вновь опубликована в 43 томе журнала «*Mathematische Annalen*» и снабжена рядом существенных дополнительных замечаний. Как уже указано выше, основная задача этой работы заключалась в том, чтобы выяснить, как надлежит понимать движение при той или иной интерпретации геометрии.

4. Геометрические движения как группы преобразований. Начиная с Евклида и по наше время мы используем в элементарной геометрии понятие движения. Евклид, как было указано нами выше, собственно пользуется движением весьма ограниченно, но все же оно играет и у него основную роль. Со времени Даламбера и Лежандра (ч. I, § 13) при изложении элементов геометрии пользуются движением гораздо шире и систематически. Следует, однако, указать на то, что хотя понятие движения, которым пользуются в геометрии, имеет много черт, общих с понятием «механического движения», т. е. с перемещением твердых тел в окружающем нас физическом пространстве, оно все же может и должно быть для нашего геометрического исследования определено с помощью терминов и понятий чисто геометрического характера. Геометрическое движение, будучи фактически скопировано с механического, все же существенно от него отличается. В чем заключается это отличие?

Когда мы производим механическое движение, скажем, плоскости в самой себе, то каждая точка M приходит в совмещение с некоторой точкой M' той же плоскости в результате непрерывного перемещения. С геометрической же точки зрения мы будем интересоваться лишь полученным в итоге отображением точки M в точку M' . Это отображение однозначное (точнее — взаимно однозначное): каждая точка M переходит в определенную точку M' (имеет определенную точку M' своим изображением) и обратно, в каждую точку M' переходит совершенно определенная точка M (каждая

точка M' служит изображением некоторой единственной точки M плоскости). Когда в геометрическом рассуждении мы пользуемся понятием движения, для нас существенно только знать, в какую точку M' переходит интересующая нас точка M , какая точка служит ее изображением. Только это интересует геометра. Для него движение играет только роль отображения передвигаемого объекта (плоскости, поверхности, пространства) на самого себя. Идею эту Клейн и выдвигает в первую очередь. Геометрическое движение есть взаимно однозначное отображение объекта на самого себя. Вместо отображения часто говорят о преобразовании плоскости (пространства) в себя самое (каждая точка M преобразуется в точку M'). Но ведь отображение или преобразование плоскости на себя самое может быть выполнено весьма многообразно. Уже Эйлер указал так называемое аффинное преобразование плоскости на себя самое (affinitas). Мы об этих преобразованиях будем говорить ниже. Возникает поэтому вопрос, какие же отображения (преобразования) надлежит рассматривать как движения; какие особенности отличают движение от других преобразований? В геометрии пользуются движением для установления конгруэнтности тех или иных геометрических образов; поэтому те свойства, которые мы соединяем с идеей конгруэнтности, естественно должны быть источником и тех свойств, которые мы приписываем преобразованиям, рассматриваемым как геометрические движения; иными словами, мы считаем **к о н г р у э н т н ы м** и два образа, которые могут быть приведены в совмещение движением.

Прежде всего мы считаем каждый геометрический образ конгруэнтным самому себе; и, следовательно, среди преобразований, представляющих геометрические движения, должно быть такое, при котором изображением каждой точки служит эта самая точка (каждая точка преобразовывается в себя самое), а соответствующее ему преобразование называется **т о ж д е с т в е н н ы м**.

Если некоторый образ $\mathcal{A}$ конгруэнтен образу $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$), то и, обратно, образ $\mathcal{B}$ мы считаем конгруэнтным образу $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$). Это значит, что каждому преобразованию, выражающему движение, должно соответствовать и **о б р а т н о е** преобразование. Иначе говоря, если среди преобразований движения существует такое, которое относит каждой точке M из некоторой совокупности точек точку M' некоторой другой совокупности, то среди преобразований, представляющих движения, должно существовать и такое, которое каждой точке M' второй совокупности относит точку M первой совокупности и именно ту, образом которой в первом движении была точка M' .

Наконец, еще одно свойство играет здесь, можно сказать, основную роль. Если образ $\mathcal{A}$ конгруэнтен образу $\mathcal{B}$, а образ $\mathcal{B}$ конгруэнтен образу $\mathcal{C}$, то образ $\mathcal{A}$ конгруэнтен образу $\mathcal{C}$ (из $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \equiv \mathcal{C}$ следует $\mathcal{A} \equiv \mathcal{C}$). И этому обстоятельству надо дать выражение в терминах теории преобразований.

Положим, что некоторое взаимно однозначное преобразование какого-либо множества элементов (плоскости, пространства) относит каждому элементу M элемент M' ; другое преобразование, также взаимно однозначное, относит элементу M' элемент M'' . Теперь отнесем каждому элементу M в качестве соответствующего элемент M'' ; совершенно ясно, что этим будет установлено взаимно однозначное преобразование того же множества в себя самого. Это третье преобразование, представляющее собой результат последовательного выполнения двух преобразований, мы будем называть **с о с т а в л е н н ы м** из первых двух. Если первое преобразова-

ние будем обозначать через S , второе—через S' , то составленное из них в указанном порядке преобразование будем обозначать через $S'S$. Преобразование $S'S$ часто называется *произведением* преобразования S и преобразования S' . Это в некоторой мере оправдывается тем, что оно, как нетрудно убедиться, удовлетворяет ассоциативному закону¹⁾:

$$S''(S'S) = (S''S')S.$$

Третье требование сводится, таким образом, к следующему. Если среди тех преобразований, которые представляют движение, существуют преобразования S и S' , то в той же совокупности преобразований должно существовать преобразование $S'S$.

Совокупность преобразований, обладающих тремя вышеуказанными свойствами, Клейн и Ли, руководствуясь аналогией с теорией Галуа в алгебре, назвали *группой преобразований*. Вывод из изложенных соображений заключается в том, что совокупность преобразований, представляющих геометрические движения, образует группу.

Такова первая и основная идея Эрлангенской программы.

Возвращаясь к определению группы, заметим, что существование тождественного преобразования является уже следствием существования обратного преобразования и преобразования, являющегося произведением двух преобразований рассматриваемой совокупности. В самом деле, если S есть произвольное преобразование рассматриваемой совокупности, а S^{-1} —обратное ему преобразование, то $S^{-1}S$ есть тождественное преобразование. Если тождественное преобразование, как это часто делают, обозначать «единицей» 1, то $S^{-1}S=1$. Этим и объясняется установившееся обозначение преобразования, обратного S , через S^{-1} . Однако из существования тождественного преобразования не следует существование обратного.

5. Развитие основной идеи. Эта точка зрения на геометрическое движение естественно привела Клейна к развитию самого понятия о геометрии. Представим себе в плоскости или в пространстве совокупность точек и группу ее отображений на самое себя или преобразований в самое себя. Изучение такой совокупности (многообразия, множества) точек с точки зрения этих преобразований составит геометрию рассматриваемого множества в свете установленной группы, предметом этого изучения должны служить те объекты, которые при любом преобразовании группы остаются неизменными, инвариантными. Предмет геометрии данного множества точек и при заданной в нем группе составляет разыскание и исследование инвариантов этой группы. Инвариантами могут являться числа, определенным образом связанные с теми или иными образами, или соотношения между этими образами, сохраняющиеся при заданных преобразованиях. Такая точка зрения, конечно, охватывает и обыкновенную, установившуюся точку зрения на геометрию. Развертывая эту идею дальше, Клейн приходит к мысли, что объектом геометрического исследования может быть не только множество точек, но и многообразие других объектов. Такими объектами могут служить другие геометрические образы, например, прямые, круги и т. п.²⁾, могут служить и другие вещи, например, числа, переменные вели-

¹⁾ Заметим, что преобразование $S'S$ вообще не совпадает с преобразованием SS' ; «произведение» преобразований вообще не коммутативно.

²⁾ Более подробно с этим вопросом можно познакомиться по книге Вебстера и Вельштейна [20], т. II, кн. I, § 8, где дана интерпретация евклидовой геометрии в параболическом пучке окружностей, а также и другие интерпретации. См. также книгу С. А. Богомолова [30].

чины, связанные с теми или иными образами. Каковы бы ни были объекты (элементы), составляющие многообразие (множество), в нем может быть установлена группа преобразований на самое себя; изучение инвариантов или инвариантных соотношений этой группы составляет предмет геометрии этого многообразия при установленной группе преобразований. Таким образом Клейном установлена точка зрения на геометрию несравненно более широкая, чем та, которая господствовала ранее.

Можно говорить о геометрии любого многообразия элементов, в нем должна быть установлена группа его преобразований в самое себя: предметом этой геометрии служит изучение инвариантов (инвариантных соотношений) этой группы.

Самая идея о геометрии любого множества, как указывает Клейн, принадлежала уже Риману. Однако Клейн дает этому понятию специфическое содержание. Сопоставление взглядов Клейна и Римана будет сделано ниже.

В качестве первого—у Клейна наиболее важного—применения этого расширенного взгляда на геометрию он указывает проективную геометрию (плоскости или пространства), которая была незадолго до того и именно в сходном порядке идей развернута Штаудтом (G. K. Staudt [³¹]) и Штейнером (J. Steiner [³²]). С точки зрения Клейна исходным многообразием, соответствующим этой геометрии, является совокупность точек евклидовой плоскости (или пространства), дополненная так называемыми несобственными элементами, а группой служит совокупность проективных преобразований плоскости (или пространства); это и приводит к новой «проективной» геометрии.

В n -мерном случае в качестве элементов исходного многообразия Клейн рассматривает все возможные совокупности n упорядоченных чисел $u_1, u_2, \dots, u_n$, заданных с точностью до общего множителя. За группу преобразований он принимает совокупность всех тех однородных линейных преобразований чисел, преобразующих такой «элемент». С точки зрения Клейна теория инвариантов этой группы составляет своеобразную геометрию. Геометрия переносится, таким образом, на арифметическую или алгебраическую почву; вместе с тем, перебрасывается мост между геометрией с одной стороны, арифметикой и алгеброй—с другой стороны. Так далеко идет обобщение идеи геометрии, установленное Клейном в Эрлангенской программе.

6. Изоморфные геометрии. Останавливаясь далее на проективной геометрии плоскости, Клейн обращает внимание на то, что проективные преобразования на плоскости суть коллинеации, т. е. преобразуют прямые в прямые же. Таким образом каждое точечное преобразование в проективной плоскости создает одновременно и новое преобразование, которое каждую прямую на проективной плоскости переводит в прямую линии этой же плоскости. Совокупность всех коллинеаций также составляет группу. Проективной геометрии точек на плоскости сопутствует проективная геометрия прямых на плоскости. Мы имеем, таким образом, две геометрии двух различных множеств. Примем теперь во внимание, что между точками и прямыми плоскости может быть установлено взаимно однозначное непрерывное соответствие: каждой точке может быть отнесена в качестве соответствующей ей прямая и каждой прямой может быть отнесена точка. Установив такое соответствие между точками и прямыми, мы одновременно устанавливаем соответствие, которое каждому точечному преобразованию относит некоторое преобразование прямых в прямые.

Это сложное учение, впоследствии развитое рядом последователей Ли¹⁾, составляет, можно сказать, целую самостоятельную дисциплину. Здесь невозможно дать изложение хотя бы ее начал. Но с некоторыми элементарными соображениями и понятиями, к этой теории относящимися, и с простейшими группами, которыми нам придется пользоваться, читателю необходимо познакомиться.

2. Перемножение преобразований. Положим, что S и T суть два преобразования некоторого множества в самого себя; тогда TS и ST также преобразуют то же множество в самого себя; но эти два преобразования TS и ST , как уже было сказано, вообще не совпадают. Однако каковы бы ни были преобразования S и T , принадлежащие некоторой группе, в ней всегда существует такое преобразование T_1 , что $TS = ST_1$; этому требованию удовлетворяет, очевидно, преобразование²⁾ $T_1 = S^{-1}TS$. Обычно говорят, что преобразование S (вместе с S^{-1}) переводит преобразование T в T_1 (или преобразует само преобразование T в T_1); результирующее преобразование T_1 может совпадать с T , может и отличаться от него. Ясно, что тождественное преобразование переходит в тождественное же преобразование, каково бы ни было преобразование S , при помощи которого этот переход от T к T_1 совершается. Два взаимно обратных преобразования при их преобразовании одним и тем же преобразованием S переходят в обратные же преобразования; в самом деле, если $T_1 = S^{-1}TS$, $T'_1 = S^{-1}T^{-1}S$, то в силу ассоциативности произведения преобразований получим:

$$T_1 T'_1 = (S^{-1}TS)(S^{-1}T^{-1}S) = S^{-1}TT^{-1}S = S^{-1}S = 1.$$

Наконец, произведение $T_1 T_2$ двух преобразований переводится преобразованием S в произведение преобразований $S^{-1}T_1 S$ и $S^{-1}T_2 S$, в которые S переводит преобразования T_1 и T_2 . В самом деле,

$$(S^{-1}T_1 S)(S^{-1}T_2 S) = (S^{-1}T_1)(SS^{-1})(T_2 S) = (S^{-1}T_1)(T_2 S) = S^{-1}(T_1 T_2)S.$$

Если поэтому все преобразования T некоторой группы $\{T\}$ переведем в преобразования T_1 каким-либо преобразованием S , принадлежащим этой группе или не принадлежащим ей, то совокупность $\{T_1\}$ преобразований T_1 также составит группу; преобразование S переводит группу $\{T\}$ преобразований T в группу $\{T_1\}$ преобразований T_1 . Положим теперь, что мы имеем две группы: группу $\{T\}$ преобразований T и группу $\{S\}$ преобразований S с одной и той же областью преобразуемых переменных. Составим всевозможные произведения ST ; их совокупность обозначим через Σ . Далее составим всевозможные произведения TS ; их совокупность обозначим через Σ' . Эти две совокупности преобразований вообще не совпадают; но в частных случаях, с которыми нам придется встречаться, они могут совпадать. Легко показать, что в этом последнем случае, когда $\Sigma' = \Sigma$ (т. е. когда каждое преобразование ST совпадает с некоторым преобразованием $T_1 S_1$), совокупность преобразований $\Sigma (= \Sigma')$ составляет группу.

¹⁾ Из более доступных изложений теории Ли укажем книгу Бианки (L. Bianchi [³⁵]) и русское сочинение Н. Г. Чеботарева [³⁶].

²⁾ О преобразовании $S^{-1}TS$ часто говорят, что оно получено из T путем трансформации преобразованием S .

В самом деле, пусть $U_1 \equiv S_1 T_1$ и $U_2 \equiv S_2 T_2$ будут некоторые преобразования совокупности Σ . Тогда

$$U_1 U_2 = (S_1 T_1) (S_2 T_2) = S_1 (T_1 S_2) T_2.$$

Но в рассматриваемом случае $T_1 S_2$ совпадает с некоторым преобразованием $S'_2 T'_1$ и потому

$$U_1 U_2 = S_1 (S'_2 T'_1) T_2 = (S_1 S'_2) (T'_1 T_2) = S'' T'',$$

где S'' — некоторое преобразование группы $\{S\}$, T'' — некоторое преобразование группы $\{T\}$. Поэтому преобразование $U_1 U_2$ входит в состав совокупности Σ .

С другой стороны, $(ST)^{-1} = T^{-1} S^{-1}$; а так как T^{-1} входит в состав группы $\{T\}$, а S^{-1} — в состав группы $\{S\}$, то $(ST)^{-1}$ в рассматриваемом случае входит в состав Σ . Вместе с тем в состав Σ входит и тождественное преобразование. В рассматриваемом случае группа Σ называется произведением группы $\{S\}$ преобразований S и группы $\{T\}$ преобразований T ; пишут:

$$\Sigma \equiv \{S\} \{T\} \equiv \{TS\}.$$

Группа Σ содержит в себе обе группы $\{S\}$ и $\{T\}$ в качестве подгруппы; их называют в этом случае делителями группы Σ и пишут: $\{S\} = \frac{\Sigma}{\{T\}}$, $\{T\} = \frac{\Sigma}{\{S\}}$. Если конечные непрерывные группы преобразований (мы только такие имеем в виду) не имеют общих преобразований, кроме тождественного, зависят первая от m_1 , вторая от m_2 параметров и из них может быть составлено произведение Σ , то группа Σ зависит от $m_1 + m_2$ параметров.

3. Нормальная подгруппа данной группы. Если группа $\{S\}$ преобразований S содержит подгруппу $\{T\}$ и мы преобразуем эту подгруппу посредством какого-нибудь преобразования S , то мы вновь получим подгруппу $\{T_1\}$ группы $\{S\}$. Если это преобразование S входит в состав $\{T\}$, то преобразованная подгруппа $\{T_1\}$ совпадает с $\{T\}$, потому что в ее состав в этом случае входит также S^{-1} , а следовательно, и каждое преобразование $S^{-1} T S$; вместе с тем преобразование $S^{-1} T S$ совпадает с $S^{-1} T_1 S$ только в том случае, если $T_1 \equiv T$. Если же преобразование S в состав подгруппы $\{T\}$ не входит, то составленная таким образом преобразованная подгруппа $\{S^{-1} T S\}$ может совпадать с подгруппой $\{T\}$, может с нею и не совпадать. В первом случае говорят, что подгруппа $\{T\}$ инвариантна относительно преобразования S . Если подгруппа $\{T\}$ остается инвариантной при любом преобразовании S группы $\{S\}$, то подгруппу T называют нормальной подгруппой (делителем) группы $\{S\}$. Таким образом $\{T\}$ есть нормальная подгруппа группы $\{S\}$, если при любом преобразовании T из $\{T\}$ и любым же преобразованием S из $\{S\}$ имеем: $S^{-1} T S = T$. Если группа Σ есть произведение группы $\{T\}$ на группу $\{S\}$: $\Sigma = \{S\} \{T\}$, и $\{T\}$ есть нормальная подгруппа группы Σ , то ее называют нормальным делителем группы Σ , а группу $\{S\}$ — соответствующей фактор-группой (соответствующим множителем).

4. Транзитивные группы. Группа преобразований некоторой области в самое себя называется транзитивной, если с помощью ее преобразований можно каждую заданную «точку» области, т. е. каждую

совокупность значений преобразуемых переменных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ перевести в любую другую ее точку $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$. Если для краткости будем обозначать точки через (x) и (x') , а через $S(x)$ ту точку, в которую точка (x) переходит при преобразовании S , то каковы бы ни были две точки (x) и (x') , в транзитивной группе всегда имеется, по крайней мере, одно такое преобразование S , что $S(x) = (x')$. Группа, в которой такое преобразование не всегда существует, называется интранзитивной.

Если преобразования группы переводят любые две точки в любые две другие точки, то группа называется дважды транзитивной; в отличие от этого транзитивная группа называется просто транзитивной, если она переводит любую точку группы в любую другую точку, но не переводит любых двух точек в любые другие две точки. Так же определяется трижды транзитивная группа и т. д.

5. Инварианты группы. Разыскание инвариантов группы преобразований составляет наиболее важный для нас отдел теории групп. Теория Ли дает средство разыскания всех инвариантов и инвариантных образов, которые данная группа допускает. Хотя эти средства не сложны, но они в такой мере связаны с общей теорией групп преобразований, что мы не имеем возможности их здесь излагать и вынуждены ограничиться изложением только некоторых общих соображений, которые нам в дальнейшем понадобятся.

Инвариантом, зависящим от переменной точки (x) , называется такая функция $\varphi(x) \equiv \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая при всяком преобразовании группы сохраняет свое значение, т. е. при всяком преобразовании группы, переводящем точку (x) в точку (x') ,

$$\varphi(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (7)$$

Транзитивная группа не имеет инвариантов одной точки; в самом деле, если бы такой инвариант существовал, то точка (x) при преобразовании группы могла бы переходить только в такую точку (x') , координаты которой удовлетворяют уравнению (7).

Если число параметров равно или больше числа преобразуемых переменных ($n \leq m$) и из уравнений (2) нельзя исключить параметры, то группа не имеет инвариантов одной точки. Если же $n > m$, то из уравнений (2) можно, вообще говоря, исключить параметры; это приводит к инвариантам группы. Если группа допускает инварианты $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\dots$, $\varphi_k(x)$, то всякая функция $\omega(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$, очевидно, также остается инвариантной при преобразованиях группы. Инварианты $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ называются независимыми, если ни один из них не представляет собой функции остальных (если между ними не имеет место соотношение вида $\omega(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k) = 0$). В теории групп доказывается, что независимые инварианты группы определяются системой линейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных относительно φ ; числом независимых решений этой системы определяется и число независимых инвариантов группы; как правило, оно равно $n - m$ (т. е. совпадает с числом уравнений, которые получим по исключению m параметров из уравнений (2)); в исключительных случаях оно превышает это число, — мы ниже встретимся с такими случаями. Пусть (x) и (y) — две произвольные точки преобразуемой области; к уравнениям группы (2) присоединим уравнения

$$y'_i = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n; a_1, a_2, \dots, a_m), \quad (2a)$$

которые выражают, в какую точку (y') при преобразованиях группы (2) переходит точка (y). Уравнения (2) и (2а) в совокупности выражают группу преобразований $2n$ переменных при тех же параметрах $a_1, a_2, \dots, a_m$. Если эта группа транзитивна, то группа (2) дважды транзитивна. Если она интранзитивна и допускает инварианты, то группа (2) допускает инварианты двух точек. Совершенно так же определяются инварианты трех, четырех точек и т. д.

Если при преобразованиях группы (2) все точки, принадлежащие некоторому образу σ , переходят в точки того же образа, заполняющие его (т. е. в каждую его точку при этом переходит точка того же образа), то говорят, что образ σ остается инвариантным при преобразованиях группы.

По замыслу Клейна предметом геометрии служит изучение инвариантов, инвариантных зависимостей и инвариантных образов некоторой заданной основной группы. Чтобы это выяснить, необходимо познаться с простейшими группами преобразований, которые и будут рассмотрены в следующем параграфе.

6. Изоморфные группы преобразований. Одна и та же группа преобразований может быть различно выражена, если преобразуемые и преобразованные переменные заменить другими, однозначно с ними связанными с помощью соотношений

$$x_i = \omega_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n); \quad x'_i = \omega_i(\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n).$$

Выражаясь геометрически, это значит: от одной координации точек перейти к другой. Группы преобразований, выраженные в этом смысле в различных координатах, естественно, рассматриваются как совпадающие, как те же группы. Совпадающие группы представляют собой частный случай изоморфных групп. Две группы называются **изоморфными**, если преобразования одной группы могут быть приведены во взаимно однозначное соответствие с преобразованиями другой группы таким образом, что произведению любых двух преобразований одной группы соответствует произведение соответствующих преобразований другой группы. Как совпадающие, так и изоморфные группы обыкновенно задаются одним своим представителем.

7. Полугруппа преобразований. Третье из тех требований, которыми определяется группа, часто рассматривается как основное свойство группы. Ли нередко называет его **групповым свойством** (Gruppeneigenschaft). Однако существуют совокупности преобразований, которые удовлетворяют этому требованию, не обладая остальными свойствами: в них могут отсутствовать обратные преобразования, отсутствуют иногда даже тождественные преобразования. Такие совокупности преобразований называют **полугруппами**. Мы встретимся с полугруппами в следующем параграфе.

§ 62. ПРОСТЕЙШИЕ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1. Скольжения прямой. Обращаясь к простейшим группам преобразований, рассмотрим прежде всего преобразования точек прямой линии. Пусть точка на прямой определяется абсциссой x . Тогда формула

$$x' = x + a, \tag{1}$$

в которой a — параметр, могущий принимать действительные значения, выражает совокупность преобразований прямой в себя, каждое из которых определяется значением этого параметра. Если мы произведем преобразование, соответствующее значению a_0 параметра a , то точке, координата которой равна x , будет отнесена точка, имеющая координату

$$x' = x + a_0. \quad (2)$$

(Точка x' будет служить изображением точки x , или, иначе, точки прямой будут преобразованы так, что каждая точка x перейдет в точку $x' = x + a$; это — различные выражения той же мысли.)

Другое преобразование той же совокупности (1), соответствующее значению a_1 параметра a , преобразует каждую точку x' в точку x'' , причем

$$x'' = x' + a_1. \quad (3)$$

Последовательное выполнение преобразований (2) и (3) приводит к новому преобразованию, которое преобразует каждую точку x в точку x'' таким образом, что

$$x'' = x + a_0 + a_1. \quad (4)$$

Ясно, что это преобразование принадлежит той же совокупности (1) и соответствует значению параметра

$$a = a_0 + a_1. \quad (5)$$

Значению 0 параметра a соответствует, очевидно, тождественное преобразование, а преобразование, обратное преобразованию (1), определяется формулой $x = x' - a$. Совокупность преобразований (1), соответствующих всем действительным значениям параметра a , таким образом, составляет группу; эта группа называется группой скольжения прямой по самой себе (без отражения; группа скольжений с отражениями задается в виде $x' = \pm x + a$). Эта группа — однопараметрическая (Ли называет такую группу одночленной), так как каждое преобразование, принадлежащее группе, однозначно определяется значением одного параметра a , входящего в формулу (1), дающую аналитическое выражение рассматриваемой группы.

Формула (5) показывает, как составляется значение параметра преобразования, представляющего собой результат последовательного выполнения двух преобразований из значений параметров составляющих преобразований (1); это есть «уравнение параметров» для рассматриваемой группы.

Заметим, однако, что в силу этой формулы те преобразования, которые соответствуют двум положительным значениям параметра a приводят в результате их последовательного выполнения к преобразованию также с положительным значением параметра. Это, однако, не означает, что те преобразования (1), которые соответствуют положительным значениям параметра a , сами по себе также составляют группу. Дело в том, что преобразования, обратного данному, в этой совокупности не существует. Преобразования (1), соответствующие положительным значениям параметра a , выражают скольжение прямой в одну сторону. Они образуют полугруппу. Совершенно так же преобразования (1), соответствующие отрицательным значениям параметра a , также составляют полугруппу. Это — полугруппа скольжений прямой в дру

гую сторону. Иногда к той и к другой полугруппе присоединяют тождественное преобразование ($a=0$). Та и другая полугруппа транзитивна и потому не допускает инварианта одной точки.

Легко видеть, что группа скольжений (1) допускает инвариант двух точек: $\varphi(x_1, x_2) \equiv x_2 - x_1$, так как

$$x'_2 - x'_1 = x_2 - x_1. \quad (6)$$

Геометрический смысл этого инварианта очевиден, если координата определена обычным способом: инвариант $\varphi(x_1, x_2)$ выражает расстояние между двумя точками, взятое с тем или иным знаком в зависимости от взаимного расположения двух точек.

«Геометрия» рассмотренной группы преобразований (1), если рассматривать ее абстрактно, с позиций, указанных в предыдущем параграфе, называется геометрией евклидовой прямой.

На прямой существует и другая одночленная группа преобразований. Совокупность этих преобразований записывается формулой

$$x' = bx \quad (b \neq 0), \quad (7)$$

в которой параметр b может принимать любые отличные от нуля вещественные значения. Если возьмем два преобразования (7), соответствующие значениям параметра b_0 и b_1 , то

$$x' = b_0 x, \quad x'' = b_1 x' \quad (8)$$

и, таким образом,

$$x'' = b_0 b_1 x,$$

т. е. результирующее преобразование выражается снова формулой (7). Уравнение параметров имеет, очевидно, вид:

$$b = b_0 b_1. \quad (9)$$

Значению параметра $b=1$ отвечает тождественное преобразование, а преобразование, обратное преобразованию (7), можно записать в виде ($b \neq 0$)

$$x = \frac{1}{b} x'.$$

Группа (7) называется группой растяжений.

Из формулы (9) следует, что совокупность преобразований (7), в которых параметр b имеет только положительные значения, сама образует группу (это—группа растяжений без отражений). Совокупность же преобразований, соответствующих отрицательным значениям b , группы не образует, так как последовательное выполнение двух преобразований (7) с отрицательными значениями параметров хотя и приводит к преобразованию (7), но с положительным значением параметра.

Интересно отметить еще одно обстоятельство. Если рассмотрим совокупность преобразований (7) со значениями $b > 1$, то уравнение (9) показывает, что последовательное выполнение двух преобразований этой совокупности приводит к преобразованию, принадлежащему той же совокупности. И все же эти преобразования не образуют группы хотя бы уже потому, что в их совокупность не входит тождественное преобразование. Совокупность преобразований (7) со значениями $b > 1$ (так же как и со значениями $0 < b < 1$) образует полугруппу.

Группа растяжений, так же как и группа скольжений, допускает инвариант двух точек:

$$\varphi(x_1, x_2) \equiv \frac{x_2}{x_1}. \quad (10)$$

Аналитически рассмотренные две группы (4) и (7) представляют одну группу. Действительно, если в (7) (рассмотрим случай, когда $b > 0$, $x > 0$, $x' > 0$) положим

$$x = e^y$$

и соответственно

$$x' = e^{y'},$$

то будем иметь

$$e^{y'} = b e^y$$

или ($b > 0$)

$$e^{y'} = e^a e^y = e^{y+a},$$

где положено $b = e^a$. Следовательно, преобразование (7) (для отмеченного случая) можно записать и в виде

$$y' = y + a,$$

а это есть преобразование, отличающееся от (1) только обозначениями. (Случай $x < 0$ и $x' < 0$ при $b > 0$ также приводится к $y' = y + a$.) Следовательно, группа (7) для $b > 0$ отличается от группы (1) только выбранной на прямой координатой.

2. Двучленные группы преобразований прямой. На прямой можно рассматривать также и двучленные группы преобразований. Такова, например, совокупность преобразований

$$x' = bx + a, \quad (11)$$

в которой параметр a может принимать любые вещественные значения, а параметр b — любые отличные от нуля вещественные значения. Групповой характер этой совокупности преобразований совершенно очевиден: два линейных преобразования (11) при последовательном их выполнении составят линейное же преобразование. Читатель без труда составит уравнения параметров.

Две точки не имеют инварианта относительно преобразований (11): эта группа дважды транзитивна и допускает инвариант только для трех точек. В самом деле, если x_1 и x_2 — абсциссы двух точек прямой, x'_1 и x'_2 — абсциссы преобразованных точек, то

$$x'_1 = bx_1 + a, \quad (12)$$

$$x'_2 = bx_2 + a \quad (12a)$$

и, следовательно,

$$x'_2 - x'_1 = b(x_2 - x_1). \quad (13)$$

Таким образом расстояние между двумя точками после преобразования увеличивается или уменьшается, если $b \neq 1$, т. е. если рассматриваемое преобразование не есть скольжение. Но если теперь x_3 — абсцисса третьей точки, которая переходит в точку x'_3 , то, очевидно,

$$x'_3 - x'_1 = b(x_3 - x_1). \quad (13a)$$

Из соотношений (13) и (13a) следует, что

$$\frac{x'_2 - x'_1}{x'_3 - x'_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}. \quad (14)$$

Три точки имеют по отношению к этой группе инвариант

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) \equiv \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}. \quad (14')$$

Геометрический смысл этого инварианта легко усмотреть: он выражает отношение расстояний двух точек от третьей.

Легко видеть, что отношение

$$\psi(x_1, x_2, x_3) \equiv \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \quad (14'')$$

также представляет собой инвариант рассматриваемой группы. Учитывая, однако, что $\psi(x_1, x_2, x_3) = 1 - \varphi(x_1, x_2, x_3)$, приходим к выводу, что второй инвариант представляет собой функцию первого; инварианты (14') и (14'') суть зависимые инварианты.

Группа (11) называется группой аффинных преобразований прямой. Абстрактная геометрия, соответствующая этой группе, называется аффинной геометрией прямой линии.

Аффинная группа преобразований на прямой имеет подгруппы, т. е. группы, входящие в ее состав. Так, если мы положим в преобразованиях (11) $b = 1$, то получим совокупность преобразований, составляющих группу (1); таким образом группа скольжений есть подгруппа аффинной группы.

Если, наоборот, в формулах (11) положим $a = 0$, то получим группу растяжений (7), которая, следовательно, также есть подгруппа группы (11).

3. Группа проективных преобразований прямой. Рассмотрим совокупность преобразований, выражаемых дробно-линейной функцией абсциссы, т. е. формулой

$$x' = \frac{bx + a}{cx + d} \quad (bd - ac \neq 0). \quad (15)$$

На первый взгляд эти преобразования зависят от четырех параметров; но в действительности число параметров может быть сведено к трем, так как все коэффициенты, входящие в числитель и знаменатель, могут быть умножены на одно и то же число. Это дает возможность в дальнейшем считать, если это понадобится, что «определитель преобразования» $bd - ac$ равен положительной или отрицательной единице. Преобразования (15) называются проективными преобразованиями прямой. Совокупность этих преобразований составляет группу, — предоставим читателю самостоятельно убедиться в этом и составить уравнения параметров. Легко также показать, что все ранее рассмотренные группы являются подгруппами этой группы. Читатель сумеет убедиться при этом, что определитель преобразования, представляющего собой результат последовательного выполнения двух каких-либо проективных преобразований, равен произведению определителей составляющих преобразований. Поэтому совокупность проективных преобразований с определителем, равным положительной единице, составляет подгруппу общей группы всех проективных преобразований. Можно доказать, что для группы проективных преобразований

прямой существует инвариант только четырех точек: x_1, x_2, x_3, x_4 ; это — так называемое двойное или ангармоническое отношение четырех точек:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} : \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4}. \quad (16)$$

Перестановка точек x_1, x_2, x_3, x_4 легко приводит еще к пяти другим инвариантам, но все они представляют собой простые рациональные функции инварианта (16). Можно показать, что группа проективных преобразований прямой имеет только один независимый инвариант четырех точек.

Абстрактная геометрия, основанная на группе (15), называется проективной геометрией прямой.

Отметим разницу между всей группой проективных преобразований и той ее подгруппой, которая соответствует определителю $+1$. В этой последней (подгруппе) переход от одного преобразования к любому другому может быть произведен последовательными весьма малыми изменениями параметров. Между тем, от преобразования с определителем $+1$ к преобразованию с определителем -1 нельзя, очевидно, перейти последовательно и весьма мало меняя значения параметров. Ли называет группу преобразований непрерывной только в том случае, если от любого ее преобразования к любому другому можно перейти, непрерывно меняя значения параметров. Непрерывные группы называют также связными. Таким образом группу проективных преобразований с определителем, равным $+1$, называют связной, а группу всех проективных преобразований — несвязной. Отметим еще одно существенное отличие проективных преобразований от аффинных. Преобразование (11) является однозначно определенным (при любом значении параметров $a, b \neq 0$) для любой точки x . Иначе обстоит дело с проективным преобразованием (15), так как точке $x = -\frac{d}{c}$ это преобразование никакой определенной точки не относит.

Это обстоятельство устраняется обогащением прямой так называемой бесконечно удаленной точкой, а лучше всего осуществляется введением на прямой так называемой однородной координатной системы, в которой положение точки на прямой определяется не одним числом, а двумя.

В этих координатах проективные преобразования выражаются целыми однородными линейными преобразованиями координат.

О бесконечно удаленных элементах нам еще придется говорить обстоятельно впоследствии.

4. Общий результат исследования групп преобразований прямой. Замечательный результат исследования групп преобразований прямой, к которому пришел С. Ли, заключается в том, что кроме рассмотренных выше групп на прямой никаких других непрерывных групп не существует. Это нужно, конечно, понимать в предположении, что группы, отличающиеся только координатой, в которой они выражены, не считаются различными (см. § 61, рубр. 6). Точнее говоря, теорема Ли может быть выражена следующим образом. На прямой существуют только три связные группы непрерывных преобразований: одночленная группа скользящих, двучленная группа аффинных преобразований и трехчленная связная группа проективных преобразований.

Еще иначе: на прямой не существует связной группы преобразований, которая содержит более трех независимых параметров; каждая связная одночленная группа может быть приведена к группе скольжений, каждая связная двучленная группа — к группе аффинных преобразований; наконец, каждая связная трехчленная группа приводится к группе проективных преобразований (в рубр. 1 дан пример такого приведения).

5. Группа преобразований плоскости; группа евклидовых движений. В плоскости существуют одночленные группы, совершенно аналогичные группе скольжений на прямой. Если отнесем плоскость к декартовым координатам x, y , то эти одночленные группы можно записать с помощью следующих формул:

$$x' = x + a, \quad y' = y \quad (17)$$

или

$$x' = x, \quad y' = y + b. \quad (17a)$$

Это — группы скольжений плоскости в себе; первая, (17), выражает скольжения, параллельные оси абсцисс, вторая, (17a), есть группа скольжений плоскости в самой себе параллельно оси ординат. Первая группа имеет два независимых инварианта: y и $x_2 - x_1$; вторая группа также имеет два независимых инварианта: x и $y_2 - y_1$.

Эти две группы объединяются в одну двучленную группу скольжений плоскости в самой себе (ее обыкновенно называют группой параллельных переносов плоскости)

$$x' = x + a, \quad y' = y + b. \quad (17b)$$

Преобразования этой группы перемещают каждую точку (x, y) на вектор с координатами a, b . Эти преобразования также имеют два инварианта: $x' - x$ и $y' - y$. К двучленной группе параллельных переносов можно присоединить одночленную группу вращений вокруг начала:

$$x' = x \cos \vartheta - y \sin \vartheta, \quad y' = x \sin \vartheta + y \cos \vartheta. \quad (18)$$

Параметрическое уравнение этой одночленной группы имеет вид:

$$\vartheta_2 = \vartheta_0 + \vartheta_1. \quad (18a)$$

Начало координат остается при преобразованиях этой группы без изменения. Легко видеть, что эта группа имеет инвариант одной точки

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2, \quad (19)$$

выражающий квадрат расстояния точки от начала координат. Геометрический смысл преобразований этой группы ясен: если x, y — декартовы координаты точки, то формулы (18) определяют вращения плоскости вокруг начала. Группы (17b) и (18) объединяются в одну трехчленную группу:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \vartheta - y \sin \vartheta + a, \\ y' &= x \sin \vartheta + y \cos \vartheta + b. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Легко видеть, что если две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) переходят при каком-либо преобразовании этой группы в точки (x'_1, y'_1) и (x'_2, y'_2) , то

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \quad (21)$$

Таким образом преобразования этой группы имеют инвариант двух точек, геометрический смысл которого — расстояние между двумя точками. Так как, кроме того, преобразованиями этой группы всякая точка плоскости может быть приведена в любую другую точку, вращением же вокруг начала координат всякий луч, выходящий из начала, может быть переведен в любой другой луч, выходящий из начала, то эта группа, как легко себе уяснить, есть не что иное, как группа движений в евклидовой плоскости.

Движения в евклидовой плоскости образуют трехчленную или трехпараметрическую группу, преобразования которой в ортогональных декартовых координатах выражаются формулами (20).

В связи с этим часто говорят, что движения в плоскости допускают три степени свободы.

Так как начало координат может быть при помощи параллельного перенесения помещено в любой точке плоскости, то группа (20) содержит также вращения в плоскости вокруг любой ее точки; всякое движение плоскости в себе может быть осуществлено перенесением любой точки M в любую другую точку N и вращением плоскости вокруг точки N . Группа движений транзитивна.

6. Нормальный делитель и фактор-группа группы движений в евклидовой плоскости. Группа Σ движений в евклидовой плоскости, как видно из предыдущего, может быть рассматриваема как произведение двучленной группы $\{S\}$ параллельных перенесений и одночленной группы $\{T\}$ вращений вокруг начала (или, конечно, вокруг любой другой точки плоскости). Покажем, что группа $\{S\}$ параллельных перенесений есть нормальный делитель группы Σ , а $\{T\}$ — соответствующая фактор-группа.

Действительно, пусть S — параллельное перенесение (17b), а T — произвольное вращение (18). Если выполнить сначала вращение T , т. е. положить

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \vartheta - y \sin \vartheta, \\ y' &= x \sin \vartheta + y \cos \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

а затем совершить преобразование S , то в результате получим:

$$x'' = x' + a; \quad y'' = y' + b. \quad (23)$$

Если теперь выполним (над x'' , y'') преобразование T^{-1} , т. е. произведем вращение на угол $-\vartheta$, то

$$\left. \begin{aligned} x''' &= x'' \cos \vartheta + y'' \sin \vartheta, \\ y''' &= -x'' \sin \vartheta + y'' \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Если исключим из уравнений (22), (23) и (24) переменные x' , y' и x'' , y'' , то выразим преобразование $T^{-1}ST$ уравнениями

$$x''' = x + A; \quad y''' = y + B,$$

где

$$\begin{aligned} A &= a \cos \vartheta + b \sin \vartheta, \\ B &= -a \sin \vartheta + b \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Это — параллельное перенесение на вектор A , B , который получится поворотом вектора (a, b) на угол $-\vartheta$. Группа $\{S\}$ параллельных пере-

несений остается инвариантной при преобразовании вращением T , а вместе с тем и при всяком движении. Это есть нормальный делитель группы движений; вместе с тем $\{T\}$ есть соответствующая фактор-группа.

7. Группа преобразований подобия. К группе движений плоскости примыкает четырехчленная группа ее преобразований подобия. Она выражается формулами:

$$\left. \begin{aligned} x' &= c(x \cos \vartheta - y \sin \vartheta) + a, \\ y' &= c(x \sin \vartheta + y \cos \vartheta) + b \end{aligned} \right\} (c \neq 0). \quad (25)$$

По отношению к этой группе две точки не имеют инварианта (если $c \neq 1$, т. е. если рассматриваемая группа не есть группа движений). В этой группе имеет инвариант только совокупность трех точек M , N , P ; он выражается отношением

$$\frac{MN}{NP} = \sqrt{\frac{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2}}.$$

Всякое преобразование этой группы изменяет расстояние между любыми двумя точками, точнее, умножает все расстояние на одно и то же число. Заметим, что группа (25) составляется из группы движений (20) и группы преобразований:

$$x'' = cx'; \quad y'' = cy', \quad (25a)$$

которые в свою очередь образуют одночленную группу преобразований, так называемую «группу гомотетий». Гомотетия представляет собой преобразование подобия относительно неподвижного центра. Таким образом каждое преобразование подобия есть результат гомотетии, сопровождаемой движением (или наоборот — результат движения, сопровождаемого гомотетией). При $c > 0$ преобразование (25a) представляет собой прямую или положительную гомотетию, сохраняющую ориентацию каждого направленного отрезка (вектора); при $c < 0$ — это гомотетия обратная или отрицательная, меняющая ориентацию вектора на противоположную.

8. Группа аффинных преобразований. Обращаемся теперь к шести-членной группе, содержащей все линейные преобразования координат:

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax + by + e, \\ y' &= cx + dy + f. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Ясно, что это преобразование будет взаимно однозначным только в том случае, когда определитель

$$ac - bd \neq 0; \quad (26a)$$

только в этом случае каждому преобразованию (26) соответствует обратное преобразование. Уравнения параметров читатель легко составит сам.

Преобразования (26) были впервые введены Эйлером и названы им аффинными преобразованиями. Непосредственным вычислением легко убедиться, что определитель аффинного преобразования, составлен-

ного из двух аффинных преобразований, равен произведению определителей составляющих преобразований. Мы будем обозначать определитель преобразования буквой D ; через D_0 и D_1 обозначим определители двух составляющих преобразований, через D_2 — определитель составленного из них преобразования; тогда

$$D_2 = D_0 D_1. \quad (27)$$

Вследствие этого все аффинные преобразования, определители которых имеют положительные значения, составляют подгруппу всей аффинной группы (26). Кроме того, аффинные преобразования, определители которых D равны ± 1 , сами по себе составляют группу — пятичленную подгруппу общей шестичленной группы всех аффинных преобразований. Далее, совокупность тех преобразований (26), для которых $D = +1$, сама по себе составляет подгруппу всей группы (26) и притом связную подгруппу.

Возьмем теперь три точки: M, N, P . Если обозначим их координаты через (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , то удвоенная площадь треугольника, вершинами которого служат эти точки, выражается с точностью до знака формулой

$$2\Delta = (x_0 - x_2)(y_1 - y_2) - (y_0 - y_2)(x_1 - x_2). \quad (28)$$

Если треугольник MNP имеет положительную ориентацию, т. е. при обходе треугольника MNP в этом порядке его вершин мы следуем тому же направлению вращения, что и при повороте, переводящем положительную ось абсцисс в положительную же ось ординат, то Δ есть положительное число, выражающее площадь треугольника. Если точки M, N, P имеют отрицательную (противоположную указанной) ориентацию, то Δ имеет отрицательное значение — отличается знаком от площади треугольника MNP . Непосредственным вычислением нетрудно убедиться, что площадь Δ' преобразованного треугольника связана с площадью Δ исходного треугольника равенством

$$\Delta' = \Delta D. \quad (29)$$

При этом предполагается, что площадь каждого треугольника взята со своим знаком; отсюда следует, что аффинные преобразования с положительным определителем ($D > 0$) не меняют ориентации точек, т. е. всякие три точки положительной ориентации переходят в три точки положительной же ориентации. Напротив, аффинные преобразования с отрицательным определителем меняют ориентацию на противоположную.

По отношению к группе всех аффинных преобразований инвариант имеют четыре точки: M, N, P, Q , не лежащие на одной прямой. Пусть, например, M, N, Q не лежат на одной прямой; тогда в качестве этого инварианта можно взять отношение площадей треугольников

$$\frac{MNP}{MNQ}. \quad (30)$$

Если сохранить прежнее обозначение для координат точек M, N, P , а координаты четвертой точки Q обозначить через (x_3, y_3) , то этот инвариант можно выразить отношением определителей:

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (30a)$$

Инварианты, соответствующие другим группировкам тех же точек, очень просто выражаются через инвариант (30а) и потому не являются независимыми.

Однако соотношение (29) влечет за собой еще один важный вывод. Если $D=1$, то $\Delta'=\Delta$, т. е. при преобразованиях рассматриваемого рода не меняется не только ориентация, но и площадь каждого треугольника. А так как на треугольники может быть разбит всякий многоугольник, то не меняется также площадь любого многоугольника. Переходя к пределу, мы приходим к заключению, что при аффинных преобразованиях с определителем $D=1$ не меняется площадь никакой фигуры. Эти преобразования часто называют эквивалентными преобразованиями. Эквивалентные преобразования составляют очень важную пятичленную подгруппу всех аффинных преобразований.

Наконец, из группы (26) выделим еще те преобразования, для которых $e=f=0$. Эта подгруппа, выражаемая однородными линейными уравнениями, оставляет неизменной начало координат ($x=0$; $y=0$). Переноса начало в любую другую точку, можно получить четырехчленную подгруппу аффинных преобразований, сохраняющих эту точку. Этого рода преобразования называют центроаффинными преобразованиями. Центроаффинные преобразования, определитель которых равен $+1$, образуют трехчленную группу центроэквивалентных преобразований; в частности, преобразования этого рода с определителем $+1$ образуют связную группу центроэквивалентных преобразований.

9. Группа проективных преобразований плоскости. В заключение остановимся еще на так называемых проективных преобразованиях плоскости, которые выражаются формулами (в тех же декартовых координатах):

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3}, \\ y' &= \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Подчеркнем, что обе дробно-линейные функции в правых частях этих уравнений имеют один и тот же общий знаменатель. Определитель системы

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (32)$$

должен быть, отличен от нуля, так как только при этом условии для каждого преобразования будет существовать и обратное.

Группа проективных преобразований (31) на первый взгляд зависит от девяти параметров; в действительности же число этих параметров сводится к восьми, так как все коэффициенты можно умножить на одно и то же число. Эту редукцию можно выполнить таким образом, чтобы определитель (32) был равен единице. Совокупность проективных преобразований плоскости образует восьмичленную группу. По отношению к проективному преобразованию инвариант допускают четыре точки, лежащие на одной прямой. Если через t обозначим параметр, через который линейно выражаются координаты точек прямой, и, в част-

ности, через t_0, t_1, t_2, t_3 обозначим значения этого параметра для четырех точек, то инвариант, о котором идет речь, выразится формулой

$$\frac{t_0 - t_2}{t_0 - t_3} : \frac{t_1 - t_2}{t_1 - t_3}. \quad (33)$$

Это — двойное или ангармоническое отношение четырех коллинеарных точек. Отметим еще, что преобразование (31) даже в том случае, когда определитель (32) отличен от нуля, не относит каждой точке плоскости определенную точку в качестве ее изображения. Именно, такого изображения не имеют те точки плоскости, которые лежат на прямой

$$a_3x + b_3y + c_3 = 0. \quad (34)$$

Как известно, этот дефект устраняется обогащением евклидовой плоскости так называемыми «бесконечно удаленными точками», образующими в своей совокупности «бесконечно удаленную прямую». С полной точностью это выполняется введением трех однородных координат вместо двух декартовых координат. В однородных координатах проективное преобразование выражается тремя формулами:

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z, \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Мы не будем на этом останавливаться, тем более, что о проективной плоскости нам придется подробнее говорить ниже.

Отметим, что все рассмотренные нами группы преобразований на плоскости обладают следующим геометрическим свойством: преобразования, определяемые этими группами, переводят прямые в прямые. По этой причине их называют коллинеациями. Восьмичленная группа проективных коллинеаций (31) содержит в себе как подгруппы остальные рассмотренные нами коллинеации.

Софус Ли установил все группы непрерывных преобразований плоскости в себя. Их оказалось тридцать две; мы привели здесь важнейшие из них, которые нам будут необходимы.

10. Другое выражение группы движений в плоскости. Уравнения, выражающие группу движений в плоскости, удобно писать в другом виде, отличном от (20), заменяя параметр ϑ четырьмя параметрами, связанными между собой тремя уравнениями. Именно, мы положим

$$\lambda_1 = \cos \vartheta, \lambda_2 = -\sin \vartheta, \mu_1 = \sin \vartheta, \mu_2 = \cos \vartheta. \quad (36)$$

Из этих выражений для параметров λ и μ видно, что они связаны соотношениями:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1; \mu_1^2 + \mu_2^2 = 1; \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 = 0. \quad (37)$$

Хорошо известно, что равенства (37) влекут за собой аналогичные соотношения:

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 = 1; \lambda_2^2 + \mu_2^2 = 1; \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 = 0, \quad (37a)$$

и обратно. Две пары чисел, связанных соотношениями (37) или, что то же, (37a), образуют так называемую ортогональную матрицу второго порядка. Эти матрицы распадаются на две категории по следу-

ющим соображениям. Если возведем в квадрат определитель Δ , составленный из этих двух пар чисел, т. е. составим произведение

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 & \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 \\ \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 & \mu_1^2 + \mu_2^2 \end{vmatrix},$$

то оно в силу соотношений (37) будет равно 1; следовательно, самый определитель Δ равен ± 1 . Сообразно этому ортогональные матрицы делятся на две категории: ортогональные матрицы первого рода имеют определитель, равный $+1$, ортогональные матрицы второго рода имеют определитель, равный -1 . Легко видеть, что числа ортогональной матрицы первого рода всегда можно однозначно выразить через один параметр ϑ равенствами (36) при $0 \leq \vartheta < 2\pi$; можно сказать, что движения в евклидовой плоскости (20) могут быть выражены формулами

$$\begin{cases} x' = \lambda_1 x + \lambda_2 y + a, \\ y' = \mu_1 x + \mu_2 y + b, \end{cases} \quad (38)$$

в которых коэффициенты $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ образуют ортогональную матрицу первого рода. Если же эти коэффициенты образуют ортогональную матрицу второго рода, то те же уравнения могут быть написаны в виде

$$\begin{cases} x' = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta + a, \\ y' = x \sin \vartheta - y \cos \vartheta + b \end{cases} \quad (39)$$

и выражают движения, сопровождаемые отражением от оси абсцисс¹⁾. Если такое движение, сопровождаемое отражением, имеет неподвижную точку, то оно представляет собой чистое отражение от некоторой прямой

$$y = x \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}. \quad (39')$$

В самом деле, эти уравнения выражают отражение от оси абсцисс, сопровождаемое вращением вокруг начала на угол ϑ . В результате этих преобразований каждая точка прямой (39') остается в покое.

11. Группы преобразований пространства. После сравнительно подробного ознакомления с группами непрерывных преобразований плоскости мы ограничимся перечислением простейших групп пространства, именно тех, которые нам будут нужны в дальнейшем изложении.

Формулы

$$x' = x + a, \quad y' = y + b, \quad z' = z + c \quad (40)$$

выражают (в декартовых координатах) трехчленную группу параллельного перенесения в евклидовом пространстве.

Формулы

$$\begin{cases} x' = \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z, \\ y' = \mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z, \\ z' = \nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 z, \end{cases} \quad (41)$$

¹⁾ Такие «движения», сопровождаемые отражениями, часто называют «отражениями».

коэффициенты которых составляют ортогональную систему (матрицу) первого рода ($\Delta = +1$), выражающую в ортогональных декартовых координатах вращение вокруг начала координат. Если коэффициенты образуют ортогональную систему второго рода ($\Delta = -1$), то эти формулы выражают вращения, соединенные с отражениями от плоскости, проходящей через начало.

Соединение преобразований (40) и (41)

$$\left. \begin{aligned} x' &= \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + a, \\ y' &= \mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z + b, \\ z' &= \nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 z + c \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

выражает в ортогональных декартовых координатах шестичленную группу всех евклидовых движений и отражений; коэффициенты, как сказано, составляют ортогональную матрицу, т. е. связаны соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 &= 1, \quad \lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 = 1, \quad \lambda_3^2 + \mu_3^2 + \nu_3^2 = 1, \\ \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2 &= 0, \quad \lambda_1 \lambda_3 + \mu_1 \mu_3 + \nu_1 \nu_3 = 0, \quad \lambda_2 \lambda_3 + \mu_2 \mu_3 + \nu_2 \nu_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Из этих уравнений легко вывести, как это сделано в рубр. 10 для плоскости, что определитель матрицы коэффициентов λ, μ, ν равен ± 1 ; преобразования, соответствующие определителям, равным $+1$, сами по себе составляют группу — непрерывную шестичленную группу движений; преобразования, соответствующие отрицательным значениям определителя, выражают отражения от плоскости (в расширенном значении этого слова).

Хорошо известно, что шесть уравнений (43) влекут за собой аналогичные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 &= 1, \quad \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = 1, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \\ \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3 &= 0, \quad \lambda_1 \nu_1 + \lambda_2 \nu_2 + \lambda_3 \nu_3 = 0, \quad \mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2 + \mu_3 \nu_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (43a)$$

Группа (42) движений и отражений имеет инвариант двух точек (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) , выражаемый формулой

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \quad (44)$$

которой, как известно, определяется квадрат расстояния между двумя точками.

Двенадцатичленная группа всех линейных преобразований

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4, \\ y' &= b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4, \\ z' &= c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4, \end{aligned} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \right\} \quad (45)$$

есть группа аффинных преобразований пространства. Совокупность этих преобразований, соответствующих значению определителя $+1$, составляет подгруппу аффинных преобразований, сохраняющих объем и ориентацию всякого тела¹⁾; преобразования, определитель которых равен -1 , меняют ориентацию на противоположную.

¹⁾ Точнее, ориентацию всякого тетраэдра.

Наконец, группа

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{a_1x + a_2y + a_3z + a_4}{d_1x + d_2y + d_3z + d_4}, \\ y' &= \frac{b_1x + b_2y + b_3z + b_4}{d_1x + d_2y + d_3z + d_4}, \\ z' &= \frac{c_1x + c_2y + c_3z + c_4}{d_1x + d_2y + d_3z + d_4}, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

коэффициенты которой могут быть нормированы таким образом, чтобы определитель, составленный из коэффициентов и свободных членов, стал бы равен ± 1 ¹⁾, образует пятнадцатичленную группу всех проективных преобразований евклидова пространства. По отношению к этой группе инвариант имеют четыре коллинеарные точки, именно их двойное (или ангармоническое) отношение.

12. Выполнение замысла Клейна. Замысел, изложенный Клейном в Эрлангенской программе, получил не только осуществление, но и далеко идущее развитие. Была построена так называемая аффинная геометрия, только в зародыше осуществленная в работах Эйлера и Мёбиуса, была развита проективная геометрия. В последние десятилетия получили широкое развитие проективная дифференциальная геометрия и аффинная дифференциальная геометрия (в частности, центроаффинная геометрия и эквиаффинная геометрия). Построены также геометрии других групп; нам придется еще говорить о них. Вообще идея Клейна, согласно которой геометрию можно строить в любом многообразии, в котором установлена группа преобразований, в течение полустолетия сохраняла руководящее значение в ходе развития самого понятия о геометрии. Осуществление этой идеи прежде всего послужило средством для построения такой интерпретации неевклидовой геометрии, при которой вопрос о ее непротиворечивости уже больше не представляет сомнений.

¹⁾ Это всегда можно выполнить, когда этот определитель отличен от нуля.

ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ

ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО В ИНТЕРПРЕТАЦИИ КЛЕЙНА

§ 63. ГРУППА ИНВАРИАНТНОГО КРУГА И СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Проективные преобразования, оставляющие инвариантным данный круг. Мы возвращаемся к указанному Бельтрами отображению гиперболической плоскости на единичный круг евклидовой плоскости, о котором мы уже говорили в гл. XI (§ 58, рубр. 5). Однако мы теперь подойдем к этому с учетом тех идей, которые были изложены в Эрлангенской программе. С этой точки зрения, как было указано в § 60, вопрос сводится к тому, каковы те преобразования, которые при отображении гиперболической плоскости на евклидову и именно на единичный круг соответствуют гиперболическим движениям (точнее, как при этом отображаются движения, имеющие место в гиперболической плоскости). Два замечания послужили ключом к решению этого вопроса. Во-первых, как указал еще Бельтрами, точки единичной окружности при этом отображении соответствуют бесконечно удаленным точкам гиперболической плоскости; поэтому при движениях последней они должны оставаться на единичной окружности; иными словами, эти преобразования должны замещать одни точки (единичной) окружности другими, т. е. должны оставлять эту окружность инвариантной. Во-вторых, так как прямые гиперболической плоскости должны отображаться прямыми—хордами окружности, то преобразования, о которых идет речь, должны преобразовывать прямые в прямые же; это должны быть коллинеации или проективные преобразования.

Вопрос сводится, таким образом, прежде всего к тому, существуют ли такие проективные преобразования, которые оставляют инвариантной данную окружность, т. е. преобразуют ее в самое себя. Можно отметить, что эта группа будет трехчленная, так как движения на гиперболической плоскости имеют три степени свободы.

Если примем радиус евклидова круга, как это делал и Бельтрами, равным единице и отнесем его к ортогональным декартовым координатам с началом в центре круга, то вопрос сводится к тому, существует ли такая подгруппа проективных преобразований

$$x' = \frac{\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3}{\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3}, \quad y' = \frac{\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3}{\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3}, \quad (1)$$

которая преобразует уравнение

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (2a)$$

в уравнение

$$x'^2 + y'^2 - 1 = 0. \quad (2b)$$

Однако в силу уравнений (1)

$$x'^2 + y'^2 - 1 = \frac{(\alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2)x^2 + (\alpha_2^2 + \beta_2^2 - \gamma_2^2)y^2 + (\alpha_3^2 + \beta_3^2 - \gamma_3^2)}{(\gamma_1x + \gamma_2y + \gamma_3)^2} + \\ + \frac{2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2)xy + 2(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 - \gamma_2\gamma_3)y + 2(\alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 - \gamma_3\gamma_1)x}{(\gamma_1x + \gamma_2y + \gamma_3)^2}. \quad (3)$$

Для того чтобы уравнение (2b) было результатом преобразования уравнения (2a), необходимо и достаточно, чтобы выражение, стоящее в правой части, обращалось в нуль при тех же значениях x, y , которые удовлетворяют уравнению (2a).

Чтобы это осуществлялось, в свою очередь необходимо и достаточно, чтобы числитель правой части (3) отличался только множителем x (постоянным и отличным от нуля) от трехчлена $x^2 + y^2 - 1$, а для этого необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2 = x, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 - \gamma_2^2 = x, \quad \alpha_3^2 + \beta_3^2 - \gamma_3^2 = -x, \quad (4a)$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2 = 0, \quad \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 - \gamma_2\gamma_3 = 0, \quad \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 - \gamma_3\gamma_1 = 0. \quad (4b)$$

Как и при всяком невырожденном проективном преобразовании, определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \quad (5)$$

должен быть отличен от нуля. Нормируя коэффициенты уравнений преобразования (1) путем умножения их на одно и то же число, можно значение x привести к единице. Чтобы получить нормирующий множитель в удобной форме, составим определитель Δ' путем умножения в определителе Δ последней вертикали и последней горизонтали на $i = \sqrt{-1}$; таким образом

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 i \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 i \\ \alpha_3 i & \beta_3 i & -\gamma_3 \end{vmatrix} = -\Delta. \quad (6)$$

Если определитель Δ' возвысим в квадрат, выполняя это по обычному правилу умножения определителей, а в полученном определителе снова умножим последнюю вертикаль и последнюю горизонталь на $-i$, то найдем:

$$-\Delta'^2 = \begin{vmatrix} \alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2 & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2 & \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 - \gamma_1\gamma_3 \\ \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2 & \alpha_2^2 + \beta_2^2 - \gamma_2^2 & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 - \gamma_2\gamma_3 \\ \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 - \gamma_1\gamma_3 & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 - \gamma_2\gamma_3 & \alpha_3^2 + \beta_3^2 - \gamma_3^2 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Отсюда вследствие равенства (6) следует $x^3 = \Delta^2$. Поэтому x^3 , а следовательно, и значение x , есть число положительное. Обозначив его соответственно этому через l^2 , нормируем коэффициенты в правой части уравнений (1) путем деления их на l ; если теперь будем под $\alpha_1, \beta_1, \dots, \gamma_3$ разумеать коэффициенты уравнений (1), этим именно

способом нормированные, то соотношения (4a) и (4b) примут вид

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2 = 1, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 - \gamma_2^2 = 1, \quad \alpha_3^2 + \beta_3^2 - \gamma_3^2 = -1, \quad (8a)$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2 = 0, \quad \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 - \gamma_2\gamma_3 = 0, \quad \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 - \gamma_3\gamma_1 = 0. \quad (8b)$$

Эти соотношения соответствуют значению $\kappa = 1$. Поэтому при таком нормировании

$$\Delta^2 = 1, \quad \Delta = \pm 1. \quad (8c)$$

Легко видеть также, что соотношениям (8a), (8b) всегда соответствуют эквивалентные им аналогичные соотношения:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = 1, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2 = 1, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 - \gamma_3^2 = -1, \quad (8a')$$

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 = 0, \quad \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 - \beta_3\gamma_3 = 0, \quad \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 - \gamma_3\alpha_3 = 0. \quad (8b')$$

Проще всего это выводится из того, что числам, связанным соотношениями (8a), (8b), соответствуют числа, служащие элементами определителя (6) и составляющие ортогональную матрицу, а для такой матрицы ортогональность не нарушается при замене горизонталей вертикалями.

Вместе с тем соотношение (3) примет вид:

$$x'^2 + y'^2 - 1 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3)^2}. \quad (9)$$

Геометрический факт, устанавливаемый этим соотношением, заключается в том, что всякое проективное преобразование, оставляющее некоторую окружность без изменения, преобразует внутренние точки круга во внутренние точки того же круга; оно преобразует весь круг, ограниченный инвариантной окружностью, в самого себя. Отметим, что для точек, лежащих внутри этой окружности и на ней, знаменатель не обращается в нуль, так как из третьего равенства (8a') следует $\gamma_3^2 > \gamma_1^2 + \gamma_2^2$, а это означает, что прямая $\gamma_1 x + \gamma_2 y - \gamma_3 = 0$ находится от центра окружности на расстоянии, большем 1, следовательно, не имеет общих точек с кругом (2a).

2. Группа Кэли—Клейна. Теперь легко видеть, что преобразования (1), коэффициенты которых связаны уравнениями (8a) и (8b), составляют группу — трехчленную подгруппу общей восьмичленной группы проективных преобразований плоскости. В самом деле, эти преобразования в применении к точкам круга (2a) взаимно однозначны; если два из них преобразуют окружность (2a) в самое себя, то и составленное из них преобразование оставляет ту же окружность инвариантной.

Эту замечательную группу обыкновенно называют группой Кэли—Клейна. Часто, по инициативе физиков, ее называют также «лоренцевой» группой, потому что она лежит в основании специальной теории относительности и именно в этой связи была впервые указана Лоренцем. Однако ту же группу рассматривал уже Кэли в мемуаре 1859 г. [37], относящемся к преобразованию квадратичных форм (см. §§ 70—72 настоящей книги). Он, правда, не дает алгебраического выражения этой группы, но рассматривает группу, оставляющую инвариантной заданную квадратичную форму. Клейн этой группой воспользовался для интерпретации неевклидовой геометрии.

Однако запись преобразований этой группы допускает еще дальнейшее нормирование, имеющее существенное значение. Преобразование (1) не изменяется, если мы все его коэффициенты $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \gamma_3)$ умножим на -1 ; соотношения (8a) и (8b) при этом остаются в силе;

определитель же Δ меняет знак на обратный. Таким образом то же преобразование можно выразить так, чтобы его определитель был равен ± 1 или -1 . Так как γ_3 в силу третьего соотношения (8а) неизбежно отлично от нуля, то мы можем сделать коэффициент γ_3 положительным и отныне всегда будем предполагать $\gamma_3 > 0$. Это дает возможность разбить все преобразования рассматриваемой группы на две категории. Именно, преобразования этой группы, в которых (при $\gamma_3 > 0$) определитель $\Delta = +1$, мы будем называть преобразованиями первого рода. Преобразования же, в которых (при $\gamma_3 > 0$) $\Delta = -1$, будем называть преобразованиями второго рода.

Существенно важно, что преобразования первого рода сами по себе образуют группу. В самом деле, если к преобразованию S , заданному формулами (1), присоединим преобразование S' :

$$x'' = \frac{\alpha'_1 x' + \alpha'_2 y' + \alpha'_3}{\gamma'_1 x' + \gamma'_2 y' + \gamma'_3}, \quad y'' = \frac{\beta'_1 x' + \beta'_2 y' + \beta'_3}{\gamma'_1 x' + \gamma'_2 y' + \gamma'_3}, \quad (1')$$

то преобразование $S'S$ можно выразить уравнениями:

$$x'' = \frac{\alpha''_1 x + \alpha''_2 y + \alpha''_3}{\gamma''_1 x + \gamma''_2 y + \gamma''_3}, \quad y'' = \frac{\beta''_1 x + \beta''_2 y + \beta''_3}{\gamma''_1 x + \gamma''_2 y + \gamma''_3}, \quad (1'')$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha''_1 &= \alpha'_1 \alpha_1 + \alpha'_2 \beta_1 + \alpha'_3 \gamma_1, & \alpha''_2 &= \alpha'_1 \alpha_2 + \alpha'_2 \beta_2 + \alpha'_3 \gamma_2, & \alpha''_3 &= \alpha'_1 \alpha_3 + \alpha'_2 \beta_3 + \alpha'_3 \gamma_3, \\ \beta''_1 &= \beta'_1 \alpha_1 + \beta'_2 \beta_1 + \beta'_3 \gamma_1, & \beta''_2 &= \beta'_1 \alpha_2 + \beta'_2 \beta_2 + \beta'_3 \gamma_2, & \beta''_3 &= \beta'_1 \alpha_3 + \beta'_2 \beta_3 + \beta'_3 \gamma_3, \\ \gamma''_1 &= \gamma'_1 \alpha_1 + \gamma'_2 \beta_1 + \gamma'_3 \gamma_1, & \gamma''_2 &= \gamma'_1 \alpha_2 + \gamma'_2 \beta_2 + \gamma'_3 \gamma_2, & \gamma''_3 &= \gamma'_1 \alpha_3 + \gamma'_2 \beta_3 + \gamma'_3 \gamma_3. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Поэтому, если Δ , Δ' , Δ'' суть определители преобразований (1), (1'), (1''), то $\Delta'' = \Delta' \Delta$; и поскольку $\Delta = \Delta' = 1$, то и $\Delta'' = 1$. Но при сделанных предположениях ($\gamma_3 > 0$, $\gamma'_3 > 0$) также и γ''_3 , рассчитанное по формуле (10), имеет положительное значение. Чтобы это обнаружить, напомним γ''_3 в виде:

$$\gamma''_3 = \gamma_3 \gamma'_3 \left(\frac{\gamma'_1}{\gamma'_3} \frac{\alpha_3}{\gamma_3} + \frac{\gamma'_2}{\gamma'_3} \frac{\beta_3}{\gamma_3} + 1 \right). \quad (11)$$

Ввиду третьего соотношения (8а'), имеющего место также для коэффициентов, помеченных штрихами, находим:

$$\left(\frac{\gamma'_1}{\gamma'_3} \right)^2 + \left(\frac{\gamma'_2}{\gamma'_3} \right)^2 = 1 - \frac{1}{\gamma'^2_3} < 1.$$

Таким же образом вследствие третьего соотношения (8а)

$$\left(\frac{\alpha_3}{\gamma_3} \right)^2 + \left(\frac{\beta_3}{\gamma_3} \right)^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2_3} < 1.$$

Мы можем поэтому положить

$$\frac{\alpha_3}{\gamma_3} = \rho \cos \psi, \quad \frac{\beta_3}{\gamma_3} = \rho \sin \psi, \quad \frac{\gamma'_1}{\gamma'_3} = \rho' \cos \psi', \quad \frac{\gamma'_2}{\gamma'_3} = \rho' \sin \psi',$$

где ρ и ρ' — положительные числа, меньшие единицы. Вместе с тем

$$\frac{\gamma'_1}{\gamma'_3} \frac{\alpha_3}{\gamma_3} + \frac{\gamma'_2}{\gamma'_3} \frac{\beta_3}{\gamma_3} = \rho \rho' \cos(\psi - \psi').$$

Это выражение по абсолютной величине меньше 1, поэтому в формуле (11) выражение, заключенное в скобки, а с ним и γ''_3 положительны.

3. Двумерная гиперболическая геометрия, построенная внутри единичного круга. Взгляды, изложенные в Эрлангенской программе, сложились у Клейна, конечно, не сразу; в предисловии к ее опубли-

кованию в I томе полного собрания его сочинений Клейн сообщает, что они созрели при общении с С. Ли осенью 1872 г. Незадолго перед этим в двух мемуарах [25], [26], относящихся к 1871 г., Клейн опубликовал работу, представляющую одно из осуществлений общей идеи Эрлангенской программы и содержащую ту интерпретацию или модель неевклидовой геометрии, которая сыграла решающую роль в ее признании и дальнейшем развитии; об этой работе мы уже упоминали в предыдущей главе (§ 60, рубр. 1). Здесь мы начнем с частной формы осуществления замысла Клейна. За субстрат геометрии, за множество, в котором она строится, примем совокупность точек евклидовой плоскости (E_2), лежащих внутри некоторой окружности. Проще всего принять радиус этой «основной» окружности за единицу длины — Клейн это и делает. Переход к более общему случаю не представляет ни затруднений, ни преимуществ. Каждая точка этого множества имеет декартовы ортогональные координаты x, y , причем $x^2 + y^2 < 1$. Введем еще избыточную координату z , полагая

$$z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}. \quad (12)$$

За группу «автоморфизмов», за группу преобразований, которую надлежит положить в основу геометрии этого множества, примем установленную выше группу проективных преобразований, оставляющих инвариантной основную окружность, а вместе с тем и ограничиваемый ею круг. Это множество с установленной в нем группой автоморфизмов будем называть пространством (двумерным) L_2 .

Если за начало прямоугольных декартовых координат в евклидовой плоскости, где осуществляется построение, принять центр основной окружности и через x, y обозначить соответствующие координаты точки в этой плоскости, то основная окружность выразится уравнением (2a), а преобразования группы, оставляющей эту окружность в покое, выразятся уравнениями (1) при связи между коэффициентами (8a) и (8b) или (8a') и (8b'). Преобразования первого рода этой группы будем называть движениями, преобразования второго рода — отражениями. Образы, которые могут быть приведены в совмещение движением, будем называть конгруэнтными; образы, которые могут быть совмещены отражением, будем называть симметричными. Чтобы отчетливо отметить, что речь идет не об обыкновенных (евклидовых) движениях, мы будем их называть гиперболическими движениями и отражениями в соответствии с наименованием геометрии, к которой они приводят. Займемся более подробным изучением движений и отражений. Ясно, что совокупность движений образует группу, совокупность отражений группы не образует. Это означает, что если образ $\mathcal{A}_1$ конгруэнтен образу $\mathcal{A}_2$ ($\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2$), а образ $\mathcal{A}_2$ конгруэнтен образу $\mathcal{A}_3$ ($\mathcal{A}_2 \equiv \mathcal{A}_3$), то образ $\mathcal{A}_1$ конгруэнтен образу $\mathcal{A}_3$; но если образ $\mathcal{A}_1$ симметричен образу $\mathcal{A}_2$, т. е. может быть с ним совмещен каким-либо отражением, а $\mathcal{A}_2$ симметричен образу $\mathcal{A}_3$, то образ $\mathcal{A}_1$ не симметричен (а конгруэнтен) образу $\mathcal{A}_3$.

4. Гиперболические движения и отражения, оставляющие центр основного круга в покое. Рассмотрим прежде всего гиперболические движения и отражения, которые составляют центр основного круга (начало координат O) в покое. Эти преобразования относят точку $x = y = 0$ точку $x' = y' = 0$. Чтобы это имело место, необходимо и достаточно, чтобы в уравнениях движения (1) было $\alpha_3 = \beta_3 = 0$; но в таком

случае из третьего равенства (8a) следует $\gamma_3 = \pm 1$. В соответствии с тем, что было сказано в рубр. 2, мы должны положить $\gamma_3 = 1$. Уравнения (8b) теперь дадут $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Вместе с тем преобразования (1) выражаются линейными уравнениями:

$$x' = \alpha_1 x + \alpha_2 y, \quad y' = \beta_1 x + \beta_2 y. \quad (13)$$

Соотношения же (8a), (8b) примут вид:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1, \quad \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 = 0. \quad (14)$$

Уравнение (9) примет теперь вид:

$$1 - x'^2 - y'^2 = 1 - x^2 - y^2 \quad (15)$$

в согласии с тем, что основной круг переходит сам в себя. Наконец, выражение определителя Δ (см. (5)), который в случае движения должен быть равен $+1$, а в случае отражения -1 , теперь даст

$$\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = \pm 1, \quad (16)$$

причем верхний знак соответствует движениям, нижний — отражениям. Равенства (14) совпадают с соотношениями, при которых преобразования (13) выражают в евклидовой плоскости вращения или же осевые отражения (от диаметра), сохраняющие начало координат. Это приводит к следующему выводу: гиперболические вращения вращаются вокруг центра основного круга в пространстве L_2 совпадают с такими же вращениями в евклидовой плоскости. Совершенно так же обнаружим, что осевые отражения в L_2 , оставляющие в покое начало координат, совпадают с соответствующими отражениями в евклидовой плоскости. То, что евклидовы вращения вокруг центра и отражения от диаметров входят в рассматриваемую группу автоморфизмов круга, геометрически очевидно, так как эти преобразования являются коллинеациями, преобразующими круг в себя, однако предыдущие рассуждения не лишни: они показывают, что других автоморфных коллинеаций, сохраняющих центр, не существует.

5. Гиперболические движения и отражения, оставляющие инвариантной ось абсцисс. Обращаясь теперь к тем движениям и отражениям в L_2 , которые не оставляют начало координат в покое, остановимся прежде всего на таких движениях, при которых все точки оси абсцисс остаются на ней же. Чтобы преобразование (1) оставляло точки оси абсцисс на ней же (т. е. чтобы из $y = 0$ следовало $y' = 0$), необходимо и достаточно, чтобы $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Второе из уравнений (8a') в этом случае дает $\beta_2 = \varepsilon$, где $\varepsilon = \pm 1$; вследствие этого уравнения (8b') дают $\alpha_2 = \gamma_2 = 0$ и $\gamma_1 \alpha_1 - \gamma_3 \alpha_3 = 0$. Так как при этом $\gamma_3 \neq 0$ (в противном случае из третьего уравнения (8a') следовало бы $\gamma_1^2 = -1$, что невозможно), то мы можем положить $\alpha_1 = \lambda \gamma_3$; тогда последнее равенство даст $\alpha_3 = \lambda \gamma_1$. А так как в силу первого из (8a') $\alpha_1^2 - \alpha_3^2 = 1$, то $\lambda^2 (\gamma_3^2 - \gamma_1^2) = 1$; но третье из (8a') дает $\gamma_3^2 - \gamma_1^2 = 1$, поэтому $\lambda^2 = 1$, а вместе с тем $\gamma_1 = \lambda \alpha_3$, $\gamma_3 = \lambda \alpha_1$. Ради четкости положим $\alpha_1 = p$, $\alpha_3 = q$, причем $p \neq 0$, тогда преобразование (1) примет вид:

$$x' = \frac{px + q}{\lambda(qx + p)}, \quad y' = \frac{\varepsilon y}{\lambda(qx + p)}. \quad (17)$$

Первое из уравнений (8a') может быть переписано в виде:

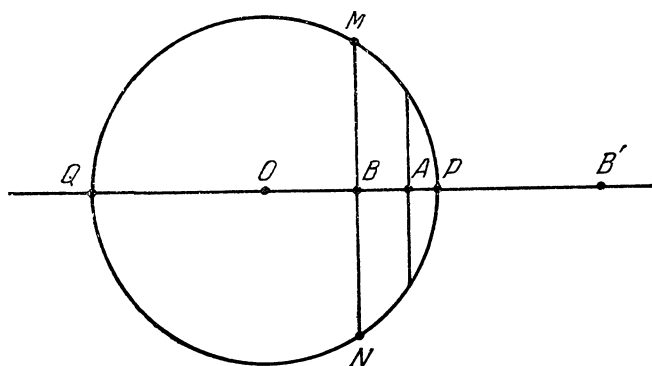
$$p^2 - q^2 = 1. \quad (18)$$

Вместе с тем, замечая, что $\lambda^2 = 1$, имеем:

$$1 - x'^2 - y'^2 = \frac{1 - x^2 - y^2}{(qx + p)^2},$$

так что основной круг остается инвариантным. Таким образом установлены все (гиперболические) движения и отражения в $\mathcal{L}_2$, оставляющие инвариантной ось абсцисс. Посмотрим теперь, существуют ли среди них движения, приводящие начало O в точку $A(a, 0)$, где $a^2 < 1$, $a \neq 0$.

Чтобы преобразование (17) выражало движение, должно быть $\Delta = \epsilon\lambda = 1$ при $\gamma_3 = \lambda p > 0$, т. е. надо положить $\lambda = \epsilon$ и выбрать p с таким



Черт. 22.

знаком, чтобы λp имело положительное значение. Чтобы это движение приводило начало в точку A (черт. 22), должно быть $\frac{q}{\lambda p} = a$. Вместе с уравнением (18) это даст

$$\lambda p = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}, \quad q = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \quad (19)$$

при положительном значении радикала.

Значению $\lambda = \epsilon = 1$ соответствует движение, которое может быть выражено уравнениями:

$$x' = \frac{x+a}{ax+1}, \quad y' = \frac{y\sqrt{1-a^2}}{ax+1}. \quad (20)$$

Это преобразование имеет определитель $+(1-a^2)^{3/2}$, который может быть приведен к 1, если все коэффициенты разделить на $\sqrt{1-a^2}$; преобразование оставляет неподвижными концы диаметра $P(1, 0)$ и $Q(-1, 0)$ основного круга (черт. 22); с возрастанием x возрастает и x' . Это движение рассматривается как скольжение по оси абсцисс.

При $\lambda = \epsilon = -1$ равенства (19) дают:

$$p = -\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}, \quad q = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Соответствующее движение может быть выражено уравнениями:

$$x' = \frac{-x+a}{-ax+1}, \quad y' = \frac{-y\sqrt{1-a^2}}{-ax+1}. \quad (21)$$

Определитель этого преобразования равен $+(1-a^2)^{3/2}$ и прежним приемом может быть приведен к 1.

Однако в этом случае концы диаметра $(1, 0)$ и $(-1, 0)$ не остаются неподвижными, а замещают друг друга. Посмотрим, существуют ли точки на оси абсцисс, которые преобразование (21) все же оставляет в покое. Абсциссы таких точек удовлетворяют уравнению

$$x = \frac{-x+a}{-ax+1}, \text{ т. е. } ax^2 - 2x - a = 0. \quad (22)$$

При $a^2 < 1$ уравнение (22) имеет два действительных корня x_1 и x_2 , для которых $x_1 x_2 = 1$. Эти две точки переходят одна в другую при инверсии относительно основной окружности. Одна из них B (скажем, с абсциссой x_1) лежит внутри этой окружности, другая B' вне ее ($x_1^2 < 1$, $x_2^2 > 1$). Нетрудно убедиться в том, что эти две точки делят гармонически как пару точек $P(+1, 0)$ и $Q(-1, 0)$ (концы диаметра), так и пару точек O, A (черт. 22).

В самом деле, по формуле (16) предыдущего параграфа двойное отношение

$$\{QP, BB'\} = \varphi(-1, 1, x_1, x_2) = \frac{(1+x_1)(1-x_2)}{(1-x_1)(1+x_2)}$$

и при $x_1 x_2 = 1$ равно -1 . Точно так же

$$\{OA, BB'\} = \varphi(0, a, x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2} : \frac{a-x_1}{a-x_2} = \frac{ax_1-1}{ax_2-1};$$

при $x_1 + x_2 = \frac{2}{a}$ это двойное отношение также равно -1 , что соответствует и более общим соображениям, изложенным ниже в § 70, рубр. 6.

Точку x_1 мы обозначили через B ; она лежит между O и A ; движение (21) приводит точки B, O в точки B, A . Следовательно, в $\mathcal{L}_2$ отрезок BO конгруэнтен отрезку BA , т. е. в геометрии $\mathcal{L}_2$ точка B является серединой отрезка OA . Движение (21) можно рассматривать как результат двух отражений:

$$x'' = \frac{-x+a}{-ax+1}, \quad y'' = \frac{+y\sqrt{1-a^2}}{-ax+1} \text{ и } x' = x'', \quad y' = -y''.$$

Первое из них замещает лучи BP и BQ друг другом, а каждый из лучей BM и BN , перпендикулярных к PQ , самим собой; в $\mathcal{L}_2$ это есть отражение от прямой MN . Второе есть отражение от диаметра PQ .

Таким образом в $\mathcal{L}_2$ существуют два и только два движения, сохраняющих ось абсцисс, совмещающих начало O с заданной точкой A на этой оси. Одно из них есть скольжение по прямой OA , другое есть отражение от той же прямой, соединенное с отражением от некоторой прямой, перпендикулярной к первой, т. е. центральная симметрия с центром на OA .

6. Законы движения в $\mathcal{L}_2$. Теперь мы имеем возможность описать движения в $\mathcal{L}_2$, т. е. охарактеризовать геометрически те движения, которые установлены в $\mathcal{L}_2$.

Мы уже видели, что в $\mathcal{L}_2$ существуют вращения вокруг начала O и эти вращения не отличаются от евклидовых вращений вокруг начала. Отсюда следует, что вращением вокруг начала можно любой луч OM , из него выходящий, совместить с любым другим лучом OM' , выходящим

из той же точки. С другой стороны, невозможно никакое движение с неподвижной точкой O и неподвижным лучом OM (т. е. с сохранением начала O и выходящего из него луча) — никакая другая точка движением уже не может быть смещена; однако возможно еще отражение от луча OM , сохраняющее все точки этого луча.

Из изложенного следует также, что точка O может быть приведена движением в любую другую точку M . Это уже было установлено в предыдущей рубрике для случая, когда точка M лежит на оси абсцисс; если же она не лежит на оси абсцисс, то вращением S вокруг начала ее можно привести в точку M' на оси абсцисс; если S' есть движение, приводящее точку O в M' , то движение $S^{-1}S'$ приводит начало O в точку M .

Но и любая точка M может быть приведена в любую другую точку M' ; в самом деле, если S есть движение, приводящее начало в точку M , а S' — движение, приводящее начало в точку M' , то движение $S'S^{-1}$ приводит точку M в M' . Наконец, такой же комбинацией легко показать, что в L_2 существуют вращения, оставляющие любую заданную точку M в покое (вращение вокруг точки M), и вращением вокруг точки M можно любой выходящий из нее луч совместить с любым другим лучом, выходящим из той же точки; но этим свобода движений (в узком смысле — без отражений) ограничивается.

Мы видим, таким образом, что в пространстве L_2 имеют место те же типы движения, что и в плоскости Евклида и Лобачевского — в так называемой абсолютной планиметрии.

7. Геометрия в пространстве L_2 . На основании таких соображений Клейн пришел к убеждению, что в пространстве L_2 при надлежащей постановке действуют все аксиомы, на которых строилась абсолютная геометрия Евклидом и его последователями. Прямой в пространстве L_2 естественно считать хорду основного круга. Тогда ясно, что через каждые две различные точки в L_2 проходит одна и только одна прямая. Позже мы увидим, что каждый отрезок можно неограниченно продолжать, не возвращаясь в точку исхода: надо будет только установить, как понимать в L_2 «неограниченное продолжение», и окажется, что это понятие можно определить так же, как это делается в абсолютной геометрии. Первые два постулата Евклида остаются в силе в пространстве L_2 . Так как в L_2 существует вращение вокруг любой точки, которое после полного оборота приводит выходящий из нее луч в совмещение с самим собой, то каждая точка луча описывает окружность, — третий постулат Евклида также остается в силе. Четвертый постулат, как мы отмечали, фактически не нужен; впрочем и он в L_2 выполняется.

Обходя постулат о параллельных, мы заметим прежде всего, что отмеченные выше (ч. I, § 10, рубр. 4) допущения, которые Евклид при построении планиметрии сверх того явно или неявно принимает, также остаются в силе. Точка лежит в L_2 между двумя другими, когда она внутри основной окружности лежит между ними в обычном (у Евклида) значении слова; точка лежит внутри того или иного образа (угла, многоугольника, окружности), когда она лежит внутри него в обычном смысле слова. Таким образом не формулированные Евклидом определения и допущения относительно расположения точек в плоскости применимы в L_2 с тем же основанием, что и в абсолютной геометрии. Совершенно ясно, что образы, которые принимаются непрерывными в гео-

метрии Евклида, должны считаться непрерывными в $\mathcal{L}_2$. Наконец, очевидно, что в $\mathcal{L}_2$ остается в силе постулат Паша, так же как в абсолютной планиметрии; в то время, когда Клейн развертывал свои идеи, этот постулат еще не был точно формулирован, но он явно принимался уже не только в работах Лежандра, но и в рассуждениях Нассир-эддина. Остановимся еще на аксиоме V Архимеда.

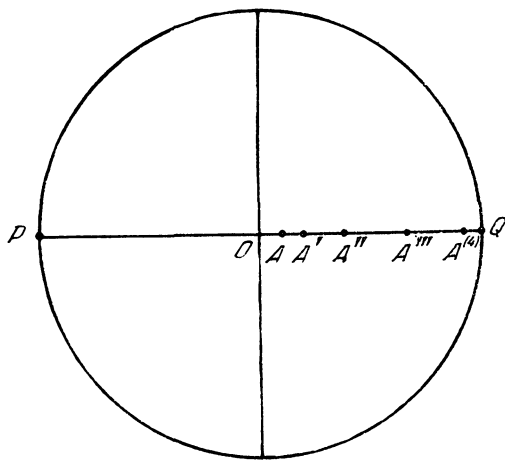
8. Линейное протяжение в пространстве $\mathcal{L}_2$ и аксиома Архимеда.

Пусть A (черт. 23) будет точка $(a, 0)$ на оси абсцисс с положительной стороны от начала ($a > 0$); соответствующее значение избыточной координаты z (см. (12)) обозначим через α , так что

$$\alpha = +\sqrt{1-a^2}. \quad (23)$$

Передвинем скольжением по оси абсцисс точку O (начало) в A ; тогда точка A займет положение $A'(a', 0)$, причем по формуле (20)

$$\begin{aligned} a' &= \frac{2a}{a^2+1}; \quad a < a' < 2a; \quad \alpha' = \\ &= \frac{1-a^2}{1+a^2} < 1-a^2, \quad \text{т. е. } \alpha' < \alpha^2. \end{aligned} \quad (24)$$



Черт. 23.

Отрезок OA' при установленных в $\mathcal{L}_2$ движениях надлежит рассматривать как удвоенный в $\mathcal{L}_2$ отрезок OA . Если таким же образом удвоим отрезок OA' , то придем к точке $A''(a'', 0)$, причем

$$a'' = \frac{2a'}{1+a'^2}, \quad a'' < a'^2 < a^4.$$

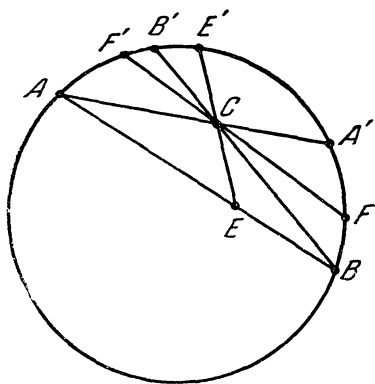
Удваивая отрезок OA'' , придем к точке A''' , для которой $\alpha''' < \alpha^8$ и т. д. Продолжая этот процесс, придем к точкам $A^{(n)}$, для которых $\alpha^{(n)} < \alpha^{2^n}$. Точка $A^{(n)}$ таким образом неограниченно приближается к концу диаметра $Q(1, 0)$ (см. черт. 23) и, следовательно, при достаточно большом n выходит за всякую точку, взятую на радиусе, идущем от O к точке Q . Отсюда двоякий вывод. Во-первых, видим, что аксиома Архимеда в пространстве $\mathcal{L}_2$ имеет место; это показано для отрезков оси абсцисс, выходящих из начала, но в такое положение может быть приведен движением любой луч с лежащими на нем отрезками. Во-вторых, точки на основной окружности могут быть рассматриваемы как бесконечно удаленные точки в $\mathcal{L}_2$. Это понятно уже сейчас, но с полной отчетливостью выявится в следующем параграфе, когда мы установим метрику в $\mathcal{L}_2$.

9. Постулат о параллельных в $\mathcal{L}_2$. Из этого рода соображений Клейн заключил, что абсолютная геометрия в $\mathcal{L}_2$ совпадает с обычной. Такое заключение нельзя было считать вполне обоснованным, поскольку, как мы не раз на это указывали, не были полностью выявлены все

аксиомы, из которых строится абсолютная геометрия; но ее можно было непосредственно строить в L_2 с той же степенью наглядности, с какой это делалось от Евклида до Лежандра. И это утверждение не вызывало возражений в той мере, в какой признавалась абсолютная геометрия Евклида.

Чтобы окончательно выяснить характер этой геометрии, остается рассмотреть, как обстоит дело с постулатом о параллельных линиях. Если AB есть произвольная прямая в L_2 (черт. 24), C — произвольная точка, вне ее лежащая, то прямые ECE' , лежащие внутри вертикальных углов ACB и $A'SB'$, встречаются AB ; прямые же FCF' , лежащие внутри вертикальных углов $B'CA'$ и ACB' , ее не встречаются; обе категории прямых отделяются одна от другой прямыми BCB' и ACA' — гиперболическими параллелями. Клейн отсюда заключил, что в пространстве L_2 имеет место гиперболическая геометрия.

Однако с точки зрения Клейна это есть не отображение двумерной гиперболической геометрии на бельтрамиев круг, а геометрия, построенная в бельтрамиевом круге как ее субстрате с установленной на ней группой движений. Вся геометрия Лобачевского может по этой схеме разворачиваться совершенно так же, как строится геометрия Евклида. В ту пору, как отмечено, это делалось с той же степенью интуиции, какую мы встречаем у Евклида; позже, когда были установлены (Гильбертом и его школой) аксиомы, вполне определяющие геометрию — евкли-



Черт. 24.

дову и гиперболическую, это построение гиперболической геометрии было выполнено со всей необходимой точностью. Это фактически осуществлено Бальдусом в небольшой книге, переведенной на русский язык [33]¹⁾. Книга делится на две части: гл. I—IV содержат краткое изложение истории вопроса; за этим следуют выяснение точки зрения Клейна на существо геометрии и аксиоматика евклидовой и гиперболической геометрии. Второй отдел книги Бальдуса, содержащий гл. V—VI, называется «Гиперболическая геометрия, как самостоятельная дисциплина». В этой самостоятельности и заключается решающая особенность установки Клейна. В евклидовой плоскости в множестве точек, лежащих внутри основного круга, совершенно самостоятельно построена геометрия, совпадающая с геометрией Лобачевского; ее логическая правильность столь же достоверна, как и для геометрии Евклида. Именно столько же достоверна, не больше и не меньше. Несовершенство этого построения могло заключаться только в том, что аксиоматика в целом не была установлена, как не была она установлена при построениях того времени и в геометрии Евклида. Это и приводило к заключению очень убедительному, хотя еще не вполне безукоризненному, что двумерная гиперболическая геометрия Лобачевского противоречия в себе не содержит. Все сомнения были устранены позже, когда аксиоматика абсолютной

геометрии было выполнено со всей необходимой точностью. Это фактически осуществлено Бальдусом в небольшой книге, переведенной на русский язык [33]¹⁾. Книга делится на две части: гл. I—IV содержат краткое изложение истории вопроса; за этим следуют выяснение точки зрения Клейна на существо геометрии и аксиоматика евклидовой и гиперболической геометрии. Второй отдел книги Бальдуса, содержащий гл. V—VI, называется «Гиперболическая геометрия, как самостоятельная дисциплина». В этой самостоятельности и заключается решающая особенность установки Клейна. В евклидовой плоскости в множестве точек, лежащих внутри основного круга, совершенно самостоятельно построена геометрия, совпадающая с геометрией Лобачевского; ее логическая правильность столь же достоверна, как и для геометрии Евклида. Именно столько же достоверна, не больше и не меньше. Несовершенство этого построения могло заключаться только в том, что аксиоматика в целом не была установлена, как не была она установлена при построениях того времени и в геометрии Евклида. Это и приводило к заключению очень убедительному, хотя еще не вполне безукоризненному, что двумерная гиперболическая геометрия Лобачевского противоречия в себе не содержит. Все сомнения были устранены позже, когда аксиоматика абсолютной

¹⁾ В настоящее время можно найти это изложение в книгах Н. В. Ефимова [39] и В. И. Костина [40].

геометрии была установлена. В истории вопроса наступил новый этап: можно сказать, что теперь никто, владевший неевклидовой геометрией, в ее логической правильности уже не сомневался.

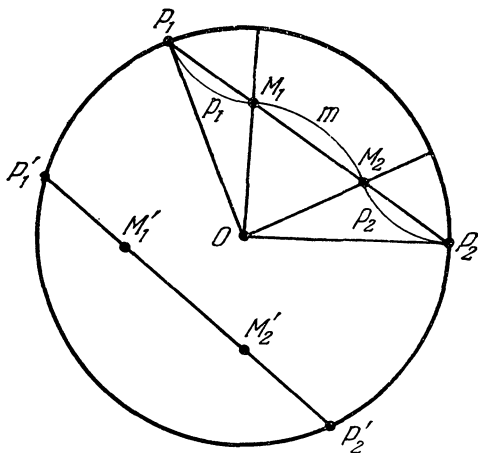
§ 64. ПОСТРОЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО ВНУТРИ ЕВКЛИДОВА КРУГА

1. Расстояние между двумя точками. Декартовы координаты (x, y) точки в основном круге будем называть бельтрамиевыми координатами точки в L_2 ; для определения расстояния между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) в L_2 Клейн рассуждает следующим образом. Расстояние между двумя точками должно быть инвариантом движения. С другой стороны, движениями служат преобразования, которые во всяком случае суть проективные преобразования плоскости. По отношению к этому преобразованию четыре коллинеарные точки имеют инвариант, именно их двойное (ангармоничное) отношение. Но в L_2 две точки M_1 и M_2 определяют две другие точки P_1 и P_2 (черт. 25) — точки пересечения прямой M_1M_2 с основной окружностью (точку P_1 берем всегда со стороны M_1 , точку P_2 — со стороны M_2). Двойное отношение

$$J = \frac{P_1M_2}{P_1M_1} : \frac{P_2M_2}{P_2M_1} \equiv \{P_1P_2, M_2M_1\} \quad (1)$$

вполне определяется точками M_1 , M_2 и остается без изменения при движении в L_2 , совмещающем точки M_1 , M_2 с точками M'_1 , M'_2 , а вместе с тем точки P_1 , P_2 — с точками P'_1 , P'_2 . Это двойное отношение, которое обозначено через J , инвариантно как при движении, так и при отражении. В том порядке точек, в каком мы его взяли, $J > 1$ и обращается в единицу лишь тогда, когда точка M_2 совпадает с M_1 . Этот инвариант, очевидно, должен быть связан с гиперболическим расстоянием точек M_1 , M_2 , поскольку для гиперболической конгруэнтности двух пар точек M_1 , M_2 и M'_1 , M'_2 необходимо и достаточно, чтобы инвариант J для этих пар имел одно и то же значение. Следовательно, гиперболическое расстояние должно быть функцией от J . Однако, когда M_2 совпадает с M_1 , то J , как уже было указано, обращается в единицу, между тем как расстояние M_1M_2 должно обратиться в нуль. Естественно поэтому принять за расстояние величину, пропорциональную $\ln J$, который всегда больше 0, так как $J > 1$; этот выбор представляется даже необходимым, если мы хотим, чтобы гиперболическое расстояние обладало «аддитивным свойством» (см. ниже (4)). Итак, обозначая коэффициент пропорциональности через $\frac{k}{2}$, а гиперболическое расстояние между точками M_1 , M_2 — через (M_1M_2) , положим

$$(M_1M_2) = \frac{k}{2} \ln J = \frac{k}{2} \ln \left(\frac{P_1M_2}{P_1M_1} : \frac{P_2M_2}{P_2M_1} \right). \quad (2)$$



Черт. 25.

Тогда

$$(M_2 M_1) = \frac{k}{2} \ln \left(\frac{P_2 M_1}{P_2 M_2} : \frac{P_1 M_1}{P_1 M_2} \right),$$

и отсюда следует, что

$$(M_1 M_2) = (M_2 M_1).$$

Если точка M_3 лежит между точками M_1 и M_2 , то

$$\left. \begin{aligned} (M_1 M_3) &= \frac{k}{2} \ln \left(\frac{P_1 M_3}{P_1 M_1} : \frac{P_2 M_3}{P_2 M_1} \right), \\ (M_3 M_2) &= \frac{k}{2} \ln \left(\frac{P_1 M_2}{P_1 M_3} : \frac{P_2 M_2}{P_2 M_3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Из соотношений (2) и (3) вытекает, что

$$(M_1 M_2) = (M_1 M_3) + (M_3 M_2). \quad (4)$$

Установленное, таким образом, расстояние $M_1 M_2$ обладает следующими свойствами: это есть положительное число, которое определяется точками M_1 , M_2 независимо от их порядка, и обращается в нуль в том и только в том случае, когда эти точки совпадают. Это число представляет собой инвариант движения и отражения, т. е. $(M_1 M_2) = (M'_1 M'_2)$ всякий раз, как точки M_1 , M_2 в L_2 приводятся в совмещение с точками M'_1 , M'_2 или соответственно с M'_2 , M'_1 . Наконец, для трех коллинеарных точек соответствующие числа удовлетворяют аддитивному закону (4). Но этими свойствами расстояние между двумя точками определяется до постоянного множителя; и так как такой множитель в формуле (2) имеется, то она и должна выражать расстояние между двумя точками в L_2 в наиболее общем виде.

Если, оставляя точку M_1 неподвижной, будем приближать M_2 к P_2 , то $M_2 P_2$ будет стремиться к нулю, двойное отношение J будет стремиться к бесконечности, а вместе с тем к бесконечности будет стремиться и расстояние $(M_1 M_2)$ (см. (2)). То же самое будет, конечно, иметь место, если, сохраняя точку M_2 , будем приближать точку M_1 к P_1 . Мы снова видим, таким образом, что точки основной окружности могут быть рассматриваемы как бесконечно удаленные точки пространства L_2 .

2. Отождествление расстояния в L_2 с соответствующим расстоянием в гиперболической плоскости. Покажем, что установленное значение расстояния между двумя точками в L_2 вполне совпадает с выражением (LIII) (ч. I, § 42, стр. 332) расстояния в гиперболической плоскости.

Если обозначим (евклидовы) длины отрезков $P_1 M_1$, $P_2 M_2$, $M_1 M_2$ (черт. 25) соответственно через p_1 , p_2 , m , то

$$J = \frac{P_1 M_2}{P_1 M_1} : \frac{P_2 M_2}{P_2 M_1} = \frac{p_1 + m}{p_1} : \frac{p_2}{p_2 + m} = \frac{(p_1 + m)(p_2 + m)}{p_1 p_2}.$$

Если положим

$$J = \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma},$$

то

$$\sigma = \frac{J - 1}{J + 1} = \frac{m(p_1 + p_2 + m)}{m(p_1 + p_2 + m) + 2p_1 p_2} = \frac{mp}{mp + 2p_1 p_2},$$

где $p = p_1 + p_2 + m$ есть длина всей хорды P_1P_2 . Если далее положим $\sigma^2 = 1 - \tau^2$, т. е. $\tau^2 = 1 - \sigma^2$,

то

$$\frac{1}{4} \tau^2 = \frac{p_1 p_2 (mp + p_1 p_2)}{(mp + 2p_1 p_2)^2} = \frac{p_1 p_2 (m + p_1)(m + p_2)}{(mp + 2p_1 p_2)^2}. \quad (5)$$

Чтобы возможно проще выразить τ^2 через координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) точек M_1, M_2 , воспользуемся средствами векторной алгебры. Написав числитель этого выражения в виде

$$\{p_1(m + p_2)\} \{p_2(m + p_1)\},$$

видим, что первый множитель представляет собой скалярное произведение векторов $\overline{P_1 M_1} \cdot \overline{M_1 P_2}$, второй — скалярное произведение векторов $\overline{P_1 M_2} \cdot \overline{M_2 P_2}$. Если радиусы-векторы точек P_1, P_2, M_1, M_2 обозначим через $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$, то первое произведение равно

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_1 - \mathbf{P}_1) (\mathbf{P}_2 - \mathbf{M}_1) &= -\mathbf{M}_1^2 + \mathbf{M}_1 (\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_1) - \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 = \\ &= \mathbf{P}_1^2 - \mathbf{M}_1^2 + (\mathbf{M}_1 - \mathbf{P}_1) (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2). \end{aligned}$$

Но вектор $\mathbf{M}_1 - \mathbf{P}_1$ направлен по прямой $P_1 P_2$, а вектор $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ — по биссектрисе угла $P_1 O P_2$; эти два вектора таким образом взаимно перпендикулярны, и скалярное произведение их равно нулю.

Следовательно,

$$p_1(m + p_2) = \mathbf{P}_1^2 - \mathbf{M}_1^2 = 1 - x_1^2 - y_1^2 = z_1^2.$$

Таким же образом

$$p_2(m + p_1) = \mathbf{P}_2^2 - \mathbf{M}_2^2 = 1 - x_2^2 - y_2^2 = z_2^2.$$

Обращаясь теперь к знаменателю выражения (5), видим, что он равен квадрату выражения

$$(m + p_1)(m + p_2) + p_1 p_2,$$

которое в векторной форме можно представить в виде

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_2 - \mathbf{P}_1) (\mathbf{P}_2 - \mathbf{M}_1) + (\mathbf{M}_1 - \mathbf{P}_1) (\mathbf{P}_2 - \mathbf{M}_2) &= \\ &= \mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2 - 2\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 + (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) (\mathbf{M}_2 - \mathbf{P}_2 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{P}_1). \end{aligned}$$

И так как последнее произведение по тем же соображениям, что и выше, обращается в нуль, то

$$mp + 2p_1 p_2 = \mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2 - 2\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 = 2(1 - \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2) = 2(1 - x_1 x_2 - y_1 y_2) = 2z_{12}.$$

Таким образом

$$\tau^2 = \frac{(1 - x_1^2 - y_1^2)(1 - x_2^2 - y_2^2)}{(1 - x_1 x_2 - y_1 y_2)^2} = \frac{z_1^2 z_2^2}{z_{12}^2}. \quad (6)$$

Это приводит к тому же выражению расстояния $(M_1 M_2)$, которое мы получили выше (см. ч. I, (LII), стр. 331 и (LIII), стр. 332) в гиперболической плоскости в бельтрамиевых координатах. Следовательно, получится то же выражение (LXXXII) (ч. I, стр. 364) для элемента длины в L_2 , которое имеет место в гиперболической плоскости.

Это совпадение результатов, полученных существенно различными путями на основе одной и той же аксиоматики, производит глубокое впечатление и оправдывает стремление к строгому логическому выводу.

3. Преобразования прямых при движениях и отражениях в L_2 .

Прямые, проходящие через центр основного круга, при вращении вокруг этого центра в L_2 преобразуются так же, как в E_2 (евклидовой плоскости). Пусть теперь

$$\lambda x + \mu y = 1 \quad (7)$$

будет в L_2 уравнение прямой, не проходящей через начало. Так как эта прямая в E_2 отстоит от центра на расстояние, меньшее 1, то (ч. I, (LVII₁), стр. 334)

$$\lambda^2 + \mu^2 > 1; \quad (7a)$$

λ, μ суть бельтрамиевы координаты прямой в L_2 . Если теперь произведем в L_2 проективное преобразование, выражаемое формулами (1) § 63 (стр. 64), то уравнение преобразованной прямой в координатах x', y' преобразованной точки может быть, вообще говоря (за исключением случая, когда эта прямая проходит через начало координат), приведено к виду:

$$\lambda' x' + \mu' y' = 1. \quad (8)$$

Чтобы вернуться отсюда к уравнению (7), достаточно подставить x', y' по упомянутым формулам (1) § 63:

$$(\lambda' a_1 + \mu' b_1 - c_1) x + (\lambda' a_2 + \mu' b_2 - c_2) y + (\lambda' a_3 + \mu' b_3 - c_3) = 0. \quad (9)$$

Сравнивая с (7) и замечая, что согласно допущению

$$\lambda' a_3 + \mu' b_3 - c_3 \neq 0, \quad (9a)$$

находим:

$$\lambda = -\frac{\lambda' a_1 + \mu' b_1 - c_1}{\lambda' a_3 + \mu' b_3 - c_3}, \quad \mu = -\frac{\lambda' a_2 + \mu' b_2 - c_2}{\lambda' a_3 + \mu' b_3 - c_3}. \quad (10)$$

Таким образом координаты прямой подвергаются преобразованию, которое несущественно (именно, в знаках) отличается от так называемого «контрагредienteного» преобразования Кэли — Клейна (§ 63, рубр. 1, 2; сопоставляя (10) с (1) § 63, обратим внимание на расстановку штрихов при координатах прямой и точки).

4. Две прямые; измерение углов в L_2 . Две прямые

$$\lambda_1 x + \mu_1 y = 1 \quad \text{и} \quad \lambda_2 x + \mu_2 y = 1 \quad (11)$$

в L_2 пересекаются, если уравнения (11) имеют совместное решение $x = x_0, y = y_0$, причем $x_0^2 + y_0^2 < 1$. Установление условий, при которых это имеет место, уже было сделано в рубр. 11 § 42 (ч. I, стр. 336); это чисто алгебраическое вычисление не зависит от того, относится ли оно непосредственно к гиперболической плоскости или к L_2 ; результат совпадает с тем, который получен в § 42 ч. I; условие пересечения выражается неравенством (LXI₁) (ч. I, там же)

$$v_{12}^2 < v_1^2 v_2^2,$$

где (как и в § 42)

$$v_1^2 = \lambda_1^2 + \mu_1^2 - 1, \quad v_2^2 = \lambda_2^2 + \mu_2^2 - 1, \quad v_{12} = \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 - 1. \quad (12)$$

Вращение вокруг начала в L_2 совпадает с соответствующим вращением в E_2 . Естественно поэтому, что число, измеряющее в L_2 центральный угол (его отношение к центральному углу, принятому за единицу),

совпадает с числом, измеряющим этот угол в E_2 . Число же, измеряющее угол, вершина которого не лежит в центре основного круга, совпадает с тем числовым значением, которым измеряется этот угол, если его вершину перенести в центр; ясно, что это число не зависит от того, как именно этот угол перенести в центр (например, каким вращением вокруг центра это перенесение может сопровождаться). Этими соображениями мы и воспользуемся, чтобы найти числовую меру угла, составленного в L_2 прямыми (11), когда они пересекаются. С этой целью выполним преобразование (движение), которое приведет точку пересечения (x_0, y_0) в начало координат. После этого произведем поворот вокруг начала так, чтобы прямая (λ_2, μ_2) совместились с осью абсцисс. Если окончательное движение выражается преобразованием (1) § 63, то прямые (11) переходят соответственно в прямые

$$y' = x' \operatorname{tg} \omega \quad \text{и} \quad y' = 0, \quad (13)$$

где ω — угол, образуемый прямыми (11) в точке (x_0, y_0) их пересечения. Подставляя сюда x' и y' по формулам (1) § 63, получим:

$$b_1 x + b_2 y + b_3 = (a_1 x + a_2 y + a_3) \operatorname{tg} \omega \quad \text{и} \quad b_1 x + b_2 y + b_3 = 0. \quad (14)$$

Эти уравнения равносильны соответственно уравнениям (11), следовательно, их коэффициенты должны быть пропорциональны:

$$b_1 - a_1 \operatorname{tg} \omega = \xi \lambda_1, \quad b_2 - a_2 \operatorname{tg} \omega = \xi \mu_1, \quad b_3 - a_3 \operatorname{tg} \omega = -\xi \quad (15)$$

и

$$b_1 = \eta \lambda_2, \quad b_2 = \eta \mu_2, \quad b_3 = -\eta. \quad (16)$$

Здесь ξ, η — множители пропорциональности, которые легко могут быть найдены, если воспользоваться соотношениями (8a') и (8b') § 63. Именно, подставляя b_1, b_2, b_3 из (16) во второе (8a'), найдем (см. также (12))

$$\eta^2 = \frac{1}{\lambda_2^2 + \mu_2^2 - 1} = \frac{1}{v_2^2};$$

возводя в каждом из уравнений (15) обе части в квадрат и учитывая (8a') и (8b') § 63, имеем:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \omega = \xi^2 (\lambda_1^2 + \mu_1^2 - 1), \quad \xi^2 = \frac{1}{v_1^2 \cos^2 \omega}.$$

Наконец, перемножая соответствующие из уравнений (15) и (16) с учетом (8a') и (8b') § 63, найдем:

$$1 = \xi \eta (\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 - 1) = \xi \eta v_{12}, \quad \xi \eta = \frac{1}{v_{12}}.$$

Достаточно сопоставить выражения, полученные для ξ^2, η^2 и $\xi \eta$, чтобы придти к формуле, определяющей угол ω :

$$\cos^2 \omega = \frac{v_{12}^2}{v_1^2 v_2^2}. \quad (17)$$

Это совпадает с выражением (LXV) (ч. I, стр. 339), выведенным при помощи тригонометрии гиперболической плоскости. Двойной знак в выражении $\cos \omega$ соответствует двум смежным углам, которые прямые (11) образуют в точке пересечения. Этого совпадения, конечно, нужно было ожидать, поскольку формула (17) выведена на основе той же аксиоматики, которая привела к выражению угла (LXV), хотя и существенно

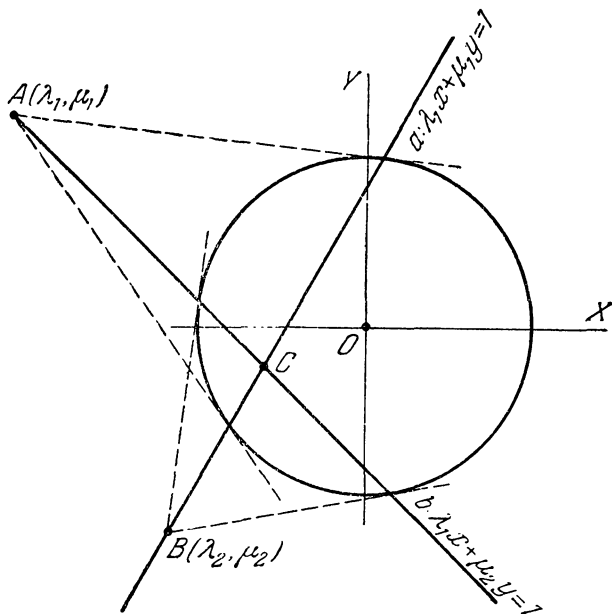
отличным путем. Результат снова подтверждает совпадение геометрии L_2 с геометрией плоскости Лобачевского. Вряд ли на этом нужно здесь еще останавливаться; мы привели только такие соображения, которые служат для сопоставления гиперболической геометрии в L_2 с соответствующими соотношениями в основном круге плоскости E_2 .

Заметим, что вычисление угла между двумя прямыми может быть сближено с вычислением расстояния между двумя точками; это будет показано ниже (§ 71, рубр. 5).

5. Перпендикулярные прямые в L_2 . Из формулы (17) следует, что две прямые (11) в L_2 пересекаются под прямым углом, если

$$\nu_{12} = \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 - 1 = 0. \quad (17a)$$

Как известно, координаты (λ, μ) прямой (7) в E_2 совпадают с точечными координатами полюса этой прямой относительно основной окруж-

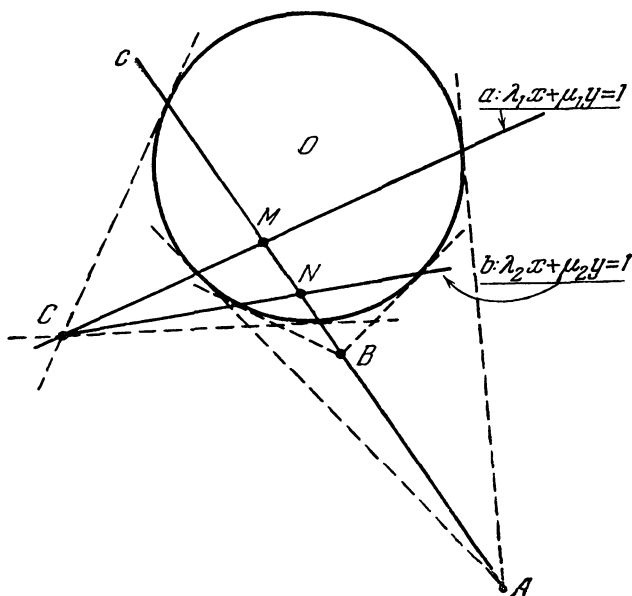


Черт. 26.

ности. Условие (7a) выражает, что в L_2 полюс прямой (7) лежит вне основной окружности, как это вполне естественно. Условие перпендикулярности двух прямых в L_2 равносильно утверждению, что каждая из них в E_2 проходит через полюс другой прямой (черт. 26). Так как полюсом диаметра в E_2 служит бесконечно удаленная точка в направлении, к нему перпендикулярном, то все прямые, перпендикулярные к некоторому диаметру основного круга E_2 , перпендикулярны к нему также в L_2 .

Из этого же признака легко также перейти к условию, при котором две прямые a и b (черт. 27) в L_2 имеют общий перпендикуляр. В самом деле, полюс такого общего перпендикуляра должен лежать на обеих прямых, т. е. должен совпадать с точкой их пересечения C . Значит, чтобы две прямые (11) a и b имели в L_2 общий перпендикуляр MN ,

необходимо и достаточно, чтобы эти прямые в E_2 пересекались вне основного круга, т. е. чтобы они в L_2 были расходящимися. Общим перпендикуляром MN будет служить поляра точки их пересечения C . Отсюда, конечно, уже нетрудно вычислить координаты этого общего перпенди-



Черт. 27.

куляра, координаты точек его пересечения с данными прямыми, его длину; результаты совпадают, конечно, с формулами, полученными в рубр. 13 § 42 (ч. I., стр. 339).

6. Вычисление угла параллельности. Пусть M —произвольная точка на оси абсцисс внутри основного круга. Обозначим евклидово расстояние OM (черт. 28) через $\bar{x}$, через x —длину того же отрезка в L_2 . Из точки M восставим перпендикуляр к оси абсцисс, он будет к ней перпендикулярен как в E_2 , так и в L_2 , и пересечет основной круг в точках K и L . Ясно, что угол $МОК = \varphi$, одинаково выражаемый как в E_2 , так и в L_2 , есть угол параллельности, который в L_2 соответствует расстоянию x . По формуле (2)

$$x = \frac{k}{2} \ln \left(\frac{P_1O}{P_1M} : \frac{P_2O}{P_2M} \right) = \frac{k}{2} \ln \left(\frac{1+\bar{x}}{1-\bar{x}} \right); \quad (18)$$

$$\frac{1+\bar{x}}{1-\bar{x}} = e^{\frac{2x}{k}}; \quad \bar{x} = \frac{e^{\frac{2x}{k}} - 1}{\frac{2x}{k} + 1} = \frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{\frac{x}{k} + e^{-\frac{x}{k}}} = \text{th } \frac{x}{k}. \quad (18a)$$

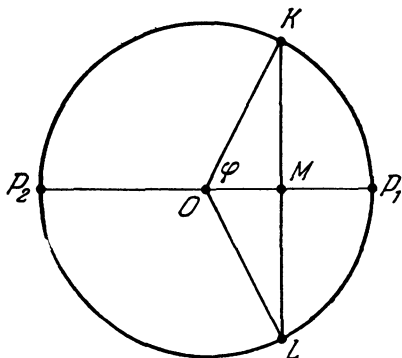
С другой стороны, $\bar{x} = \cos \varphi$; предыдущее равенство дает поэтому

$$\cos \varphi = \cos \Pi(x) = \text{th } \frac{x}{k}, \quad \text{tg } \frac{1}{2} \varphi = \text{tg } \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}} \quad (19)$$

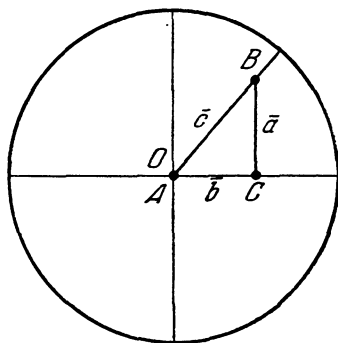
в полном согласии с основной формулой Лобачевского (XXIII) (ч. I, стр. 294). Вместе с тем

$$\bar{x} = \operatorname{th} \frac{x}{k} = \cos \Pi(x). \quad (19a)$$

Теперь возьмем прямоугольный треугольник ABC (черт. 29), вершина которого A помещена в центре O основного круга, а катет AC лежит на оси абсцисс; через $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ обозначим длины катетов и гипо-



Черт. 28.



Черт. 29.

тенузы в E_2 , через a , b , c — их длины в L_2 . Тогда $\bar{b} = \bar{c} \cos A$, а по формуле (19a)

$$\bar{b} = \cos \Pi(b), \quad \bar{c} = \cos \Pi(c).$$

Получаем:

$$\cos \Pi(b) = \cos \Pi(c) \cos A,$$

что совпадает с уравнением (XXVI₇) гиперболической тригонометрии (ч. I, стр. 297). Несколько кропотливее вывод остальных тригонометрических уравнений в L_2 ; они, конечно, совпадают с соответствующими уравнениями гиперболической тригонометрии.

7. Кривые постоянной кривизны в L_2 . Так как декартовы координаты x , y , которыми мы здесь пользовались, совпадают с бельтрамиевыми координатами соответствующей точки гиперболической плоскости, то кривые постоянной кривизны выражаются уравнениями вида (LXXII) (ч. I, стр. 344), где $P(x, y)$ — квадрат линейного трехчлена:

$$1 - x^2 - y^2 = (ax + by + c)^2. \quad (20)$$

Как и там, докажем, что при

$$e \equiv c^2 - a^2 - b^2 > 1 \quad (20a)$$

это уравнение не выражает никакого действительного геометрического места. В остальных случаях для всякой точки, принадлежащей кривой (20), $1 - x^2 - y^2 \geq 0$; кривая лежит в области L_2 , доходя иногда до основной окружности. Ее общие точки с основной окружностью определяются уравнениями:

$$1 - x^2 - y^2 = 0, \quad (ax + by + c)^2 = 0. \quad (21)$$

Кривая имеет с основной окружностью двойное касание, именно касание происходит в точках (действительных или мнимых) ее пересечения

с прямой

$$ax + by + c = 0. \quad (22)$$

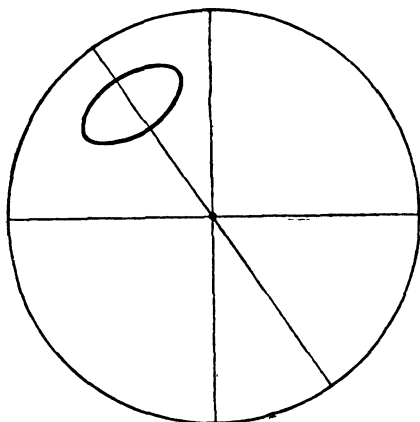
Написав уравнение (20) в виде

$$x^2(1+a^2) + 2abxy + y^2(1+b^2) + 2acx + 2bcy + c^2 - 1 = 0,$$

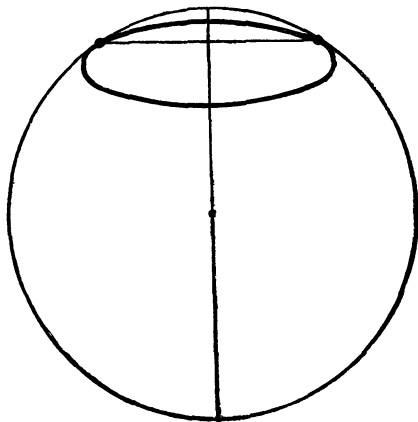
видим, что в E_2 оно выражает эллипс, центр которого лежит в точке

$$x_c = \frac{-ac}{1+a^2+b^2}, \quad y_c = \frac{-bc}{1+a^2+b^2},$$

а одна из главных осей (меньшая) направлена к центру. При $1 > e > 0$



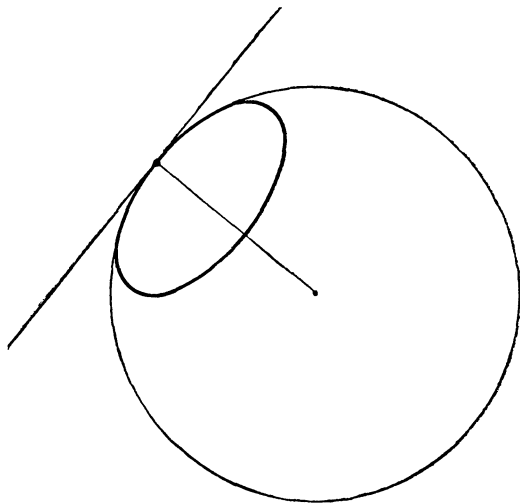
Черт. 30.



Черт. 31.

эллипс представляет в L_2 окружность, прямая (22) основной окружности не встречает (двойное касание с основной окружностью происходит в мнимых точках) (черт. 30).

При $e < 0$ прямая (22) проходит внутри окружности; касание имеет место в двух действительных точках, и эллипс, лишенный этих двух точек, представляет в L_2 эквидистанту, базой которой служит прямая (22) (черт. 31). Наконец, при $e = 0$, т. е. при $c^2 = a^2 + b^2$, прямая (22) касается основной окружности; эллипс, имеющий теперь с окружностью касание третьего порядка, после изъятия точки касания представляет в L_2 предельную линию. Одна из осей этой линии, проходящая через (бесконечно удаленную в L_2) точку касания, направлена к центру основной окружности (черт. 32). Итак,



Черт. 32.

образом кривой постоянной кривизны в L_2 всегда служит в E_2 (в бельтрамиевом круге) эллипс, малая ось которого направлена к центру основной окружности.

8. Заключительные соображения. Геометрию, построенную в L_2 , как она изложена выше, обыкновенно называют клейновой интерпретацией плоской гиперболической геометрии. Этот термин «интерпретация геометрии» вошел в употребление и обыкновенно понимается как относящийся к многообразию, в котором построена система отношений с той же аксиоматикой, что у данной геометрии. Изложенная в настоящем параграфе интерпретация Клейна, как уже выяснено выше, с достаточным основанием рассматривалась как убедительное доказательство того, что геометрия Лобачевского не содержит логического противоречия; сомнения, которые могли оставаться, отмечены выше (рубр. 9 § 63); мы еще к ним возвратимся. Однако замысел Клейна, изложенный в указанных выше его мемуарах, гораздо шире; мы теперь изложим развитее, которое он получил у Клейна и после него.

§ 65. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КЛЕЙНА

1. Общая постановка замысла Клейна. Строго говоря, уже в первых своих мемуарах ^[25], ^[26] Клейн, опираясь на работу Кэли (содержание которой изложено ниже в §§ 70, 71), ставит задачу о построении интерпретации неевклидовой геометрии гораздо шире и притом в двух отношениях: во-первых, при воспроизведении плоской двумерной геометрии он не ограничивается группой проективных преобразований инвариантного круга, а рассматривает группу, оставляющую инвариантным любое овальное (т. е. действительное и невырожденное) коническое сечение, во-вторых, он строит модель не только двумерной, но и трехмерной неевклидовой геометрии.

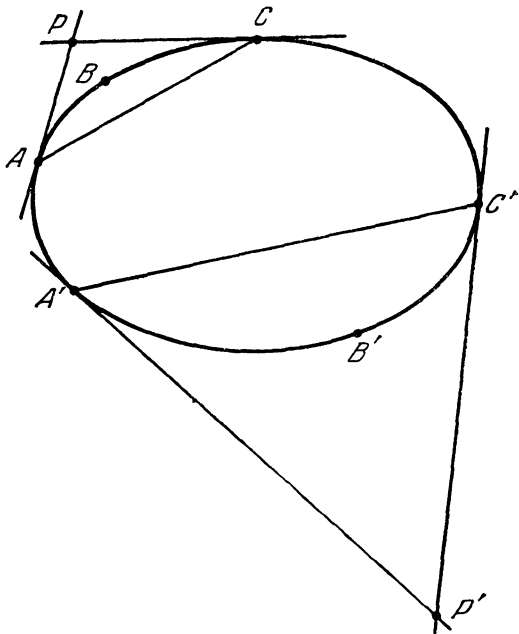
Ограничиваясь сначала геометрией плоскости, Клейн исходит из предложения, которое было известно и до него: каково бы ни было овальное коническое сечение, всегда существует трехпараметрическая группа проективных преобразований плоскости, оставляющих это коническое сечение инвариантным. Это проще всего подтверждается следующими соображениями.

Как известно, точечное проективное соответствие в плоскости вполне устанавливается заданием четырех точек, соответствующих заданным исходным четырем точкам общего положения, т. е. образующим невырожденный четырехугольник (никакие три из вершин не лежат на одной прямой). Проективное соответствие преобразует всякое овальное коническое сечение в овальное же. При этом любая точка и ее поляр относительно этого конического сечения переходят в полюс и поляр преобразованной кривой; в частности, точка на коническом сечении и касательная к ней переходят в точку преобразованной кривой и касательную к ней в этой точке.

Пусть теперь Φ — некоторое овальное коническое сечение, A, B, C — произвольные три различные точки на нем. Две из этих трех точек (скажем, A и C) соединим прямой AC ; пусть P будет полюс этой прямой (черт. 33) относительно конического сечения (P есть точка пересечения касательных AP и CP , проведенных в точках A и C). Если проективное преобразование Π преобразует коническое сечение Φ в себя само, то оно переводит точки A, B, C в точки A', B', C' того же конического сечения и полюс P прямой AC в полюс P' прямой $A'C'$. Имея это в виду, фиксируем на коническом сечении Φ три точки A, B, C ; вместе с тем окажется фиксированной точка P — полюс прямой AC . Теперь выберем на Φ произвольные три различные точки A', B', C' , которые

примем за соответствующие точкам A, B, C ; пусть P' будет полюс прямой $A'C'$ относительно Φ . Четыре точки A', B', C', P' в качестве соответствующих точкам A, B, C, P определяют проективное соответствие Π в этой плоскости; оно преобразует коническое сечение Φ в коническое сечение Φ' . Как известно, три точки A', B', C' вместе с проведенными в двух из них (A', C') касательными ($A'P', C'P'$) однозначно определяют коническое сечение Φ' (грубо говоря, задание этих элементов равносильно заданию пяти точек: B' , одной пары слившихся в A' и другой пары слившихся в C'), поэтому Φ' не может отличаться от Φ . Этим доказано, что преобразование Π оставляет коническое сечение Φ инвариантным.

Проективное преобразование Π определяется таким образом заданием трех точек A', B', C' конического сечения, как соответствующих фиксированным точкам A, B, C . Но каждая из точек A', B', C' на коническом сечении Φ определяется одним числовым заданием (например, полярным углом в системе, где полюсом служит фокус, а полярной осью — главная ось). Каждое преобразование Π таким образом зависит от трех параметров, а совокупность таких преобразований составляет трехпараметрическую группу.



Черт. 33.

Под внутренней областью конического сечения, как обыкновенно, разумеют ту часть плоскости, из точек которой нельзя провести действительных касательных к кривой. Ясно, что каждое действительное преобразование Π , которое преобразует коническое сечение Φ в само себя, приводит каждую внутреннюю ее точку во внутреннюю же его точку; в самом деле, иначе две мнимые касательные переходили бы в действительные касательные. Овальное коническое сечение может быть принято за абсолют клейновой интерпретации гиперболической геометрии. Посмотрим, как осуществляется этот более общий замысел.

2. Замена кругового абсолюта другим овальным коническим сечением. Как известно, каково бы ни было овальное коническое сечение E , существует проективное преобразование T , которое преобразует круг K единичного радиуса в коническое сечение E (окружность и внутренние точки круга в периферию и соответственно во внутренние точки кривой E). Если S есть любое проективное преобразование, оставляющее круг инвариантным, т. е. входящее в состав группы Кэли — Клейна, то преобразование $S' = TST^{-1}$, как легко видеть, оставляет инвариантным коническое сечение E . Совершенно ясно, что можно построить геометрию, аналогичную геометрии $\mathcal{L}_2$, развернутой в двух предыдущих параграфах,

принимая за субстрат часть евклидовой плоскости, расположенную внутри кривой E , а за движения и отражения — преобразования группы, оставляющие инвариантной эту кривую. По существу, построенная таким образом геометрия не отличается от L_2 ; она ей изоморфна — роль абсолюта играет не окружность, а коническое сечение E ; формулы носят более общий характер.

3. Выражение расстояния между двумя точками в модели Клейна при любом овальном абсолюте. Напишем уравнение конического сечения, служащего абсолютом, в однородных координатах x, y, z в виде

$$\Phi(x, y, z) = ax^2 + cy^2 + fz^2 + 2bxy + 2eyz + 2d zx = 0. \quad (1)$$

К функции $\Phi(x, y, z)$ присоединим множитель $+1$ или -1 так, чтобы для внутренних точек этого конического сечения было $\Phi(x, y, z) > 0$. Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ — две точки внутри абсолюта, то прямую, через них проходящую, можно выразить уравнениями:

$$x = \lambda x_1 + \mu x_2, \quad y = \lambda y_1 + \mu y_2, \quad z = \lambda z_1 + \mu z_2. \quad (2)$$

Чтобы разыскать точки, в которых прямая (2) пересекает коническое сечение (1), подставляем выражения (2) в уравнение (1).

Для соответствующего значения $\frac{\lambda}{\mu}$ получим уравнение

$$\lambda^2 \Phi_{11} + 2\lambda \mu \Phi_{12} + \mu^2 \Phi_{22} = 0, \quad (3)$$

где Φ_{11} и Φ_{22} суть значения формы Φ в точках x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 , а Φ_{12} есть значение соответствующей билинейной формы:

$$\begin{aligned} \Phi_{12} = & ax_1x_2 + cy_1y_2 + fz_1z_2 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + \\ & + e(y_1z_2 + y_2z_1) + d(z_1x_2 + z_2x_1). \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение (3) дает два значения отношения $\frac{\lambda}{\mu}$:

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{-\Phi_{12} + \sqrt{\Phi_{12}^2 - \Phi_{11}\Phi_{22}}}{\Phi_{11}} \quad \text{и} \quad \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{-\Phi_{12} - \sqrt{\Phi_{12}^2 - \Phi_{11}\Phi_{22}}}{\Phi_{11}}.$$

Для двойного отношения пары точек M_1, M_2 и пары точек пересечения, соответствующих найденным для $\frac{\lambda}{\mu}$ значениям (точнее, для того двойного отношения, которое больше 1), получим (см. [41], § 184):

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{\mu_1} : \frac{\lambda_2}{\mu_2} \left(\text{или} \frac{\lambda_2}{\mu_2} : \frac{\lambda_1}{\mu_1} \right) = \\ = \frac{\Phi_{12} - \sqrt{\Phi_{12}^2 - \Phi_{11}\Phi_{22}}}{\Phi_{12} + \sqrt{\Phi_{12}^2 - \Phi_{11}\Phi_{22}}} \left(\text{или} \frac{\Phi_{12} + \sqrt{\Phi_{12}^2 - \Phi_{11}\Phi_{22}}}{\Phi_{12} - \sqrt{\Phi_{12}^2 - \Phi_{11}\Phi_{22}}} \right) = \frac{1 + \sqrt{1 - \tau^2}}{1 - \sqrt{1 - \tau^2}}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\tau^2 = \frac{\Phi_{11}\Phi_{22}}{\Phi_{12}^2}. \quad (6)$$

Поскольку прямая, проходящая через две внутренние точки конического сечения, пересекает его в двух действительных точках, всегда будет $\tau^2 < 1$. Двойное отношение (5) больше 1, и для расстояния двух точек мы получаем выражение (LIII) (ч. I, стр. 332), причем, однако, в общем случае τ^2 имеет значение (6).

4. Общая теорема. Изложенные соображения могут быть выражены следующей общей теоремой: Какова бы ни была в евклидовой плоскости овальная кривая второго порядка, внутри нее можно построить клейнову интерпретацию гиперболической плоскости; движениями в этой интерпретации служат проективные преобразования, оставляющие это коническое сечение (абсолют) инвариантным (преобразующие его в самого себя). Метрическими величинами служат численные инварианты этих преобразований. Абсолют можно рассматривать как совокупность бесконечно удаленных точек гиперболической плоскости.

5. Распространение тех же идей на трехмерное пространство. Интерпретация Клейна воспроизвела внутри абсолюта гиперболическую геометрию полностью; она не подвержена тем упрекам, которые справедливо делались интерпретациям Бельтрами. К тому же она, естественно, приводит к аналогичной интерпретации трехмерного гиперболического пространства, каковую Бельтрами считал недоступной для его метода.

Совершенно аналогично тому, как в плоскости существует ∞^3 действительных проективных преобразований, оставляющих инвариантным заданное коническое сечение, в трехмерном евклидовом пространстве существует ∞^6 таких проективных преобразований, которые оставляют инвариантной заданную овальную (невыврожденную и нелинейчатую) поверхность второго порядка; при этих преобразованиях остается инвариантной и область, лежащая внутри этой поверхности (т. е. совокупность тех точек пространства, из которых нельзя провести к поверхности действительных касательных). Принимая эту область за субстрат геометрии, а преобразования, оставляющие эту поверхность (абсолют) инвариантной, за движения и отражения, строим отображение (модель), точно воспроизводящее внутри абсолюта гиперболическую геометрию трехмерного пространства. Прямыми в этой интерпретации служат хорды этой поверхности. Прямая, соединяющая две «точки этого пространства», пересекает абсолют еще в двух точках; получается четверка точек, надлежащим двойным отношением которых определяется расстояние между этими точками; соответствующими инвариантами движений определяются и другие метрические величины этой геометрии. Все выполняется совершенно аналогично тому, как это делается в плоской интерпретации Клейна.

Теперь уже не могло оставаться существенных сомнений в логической правильности построенной Н. И. Лобачевским геометрии гиперболического пространства. Во всяком случае по степени обоснованности новая система не уступала евклидовой геометрии. В силе могли оставаться лишь те возражения, которые в такой же мере относились и к евклидовой геометрии: не были еще с достаточной ясностью выявлены посылки, на которых может быть строго логически построена абсолютная геометрия, а вместе с ней и евклидова и гиперболическая. Иными словами, после работ Клейна вопрос стоял уже не столько о логической правильности гиперболической геометрии, сколько о точной формулировке тех посылок, на которых основана абсолютная геометрия. Во всей остроте встал вопрос о строгом обосновании геометрии—вопрос, который оставался неразрешенным в течение свыше двух тысячелетий; но только теперь работами Лобачевского и его

последователей была действительно подготовлена почва для его решения. Однако, прежде чем перейти к этим новым методам геометрии, нужно еще остановиться на том развитии, которое в ближайшие годы получили идеи Лобачевского и методы интерпретации созданной им геометрии.

§ 66. ПРОЕКТИВНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОНИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

1. Обогащение гиперболической плоскости новыми точками и прямыми. Интерпретация (модель, карта) Клейна послужила основанием для расширения плоскости и пространства Лобачевского, для обогащения их новыми элементами. Если исходить из этой интерпретации (что фактически имело место), то расширение развертывается с большой простотой. Пусть ω —овальное коническое сечение (например, эллипс или даже окружность), служащее абсолютом отображения; геометрия Лобачевского осуществляется внутри абсолюта, т. е. плоскость Лобачевского в этой интерпретации представляется внутренней областью абсолюта. К ней может быть присоединена и периферия абсолюта, если включить в плоскость и бесконечно удаленные точки; эту область будем обозначать через Ω .

Теперь присоединим к области Ω все остальные точки евклидовой плоскости, которую предварительно расширим до проективной плоскости (как обычно, с помощью бесконечно удаленных элементов). Эти присоединенные точки будем называть *идеальными* точками гиперболической плоскости. Все точки расширенной евклидовой плоскости по отношению к ω и связанной с ω интерпретацией разбиваются таким образом на три категории: к первой относятся точки, лежащие *внутри абсолюта*, ко второй—точки, лежащие *на самом абсолюте*, к третьей—точки, лежащие *вне абсолюта*. В смысле геометрии Лобачевского, осуществленной внутри абсолюта, точки первой категории являются ее *обыкновенными* точками, точки второй категории—ее *граничными* или *бесконечно удаленными* точками, точки третьей категории—ее *идеальными* точками. Обитателю плоскости Лобачевского, осуществленной внутри абсолюта, доступны только обыкновенные ее точки; граничные точки от него бесконечно удалены, а идеальные точки, можно сказать, «лежат за бесконечностью». Рассматривая плоскость Лобачевского в этом ее обогащенном виде, следует считать, что всякие две ее прямые пересекаются в одной точке—обыкновенной, граничной или идеальной; к числу последних принадлежат и внешние для абсолюта бесконечно удаленные точки расширенной евклидовой плоскости.

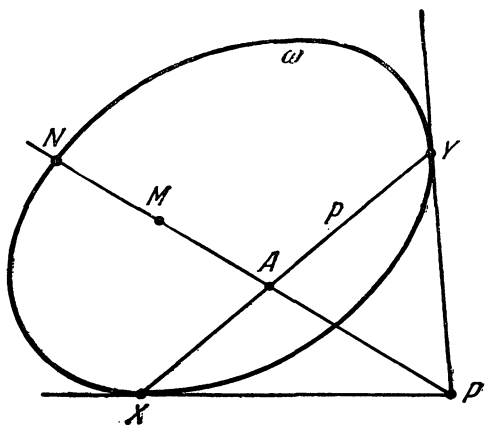
Вместе с тем и прямые обогащенной плоскости делятся на *обыкновенные*, которые пересекают абсолют и потому имеют отрезок, лежащий внутри абсолюта, *граничные*, касающиеся абсолюта, и *идеальные*, лежащие целиком вне абсолюта; последнее название, может быть, неудачно, но оно получило широкое распространение.

2. Плоскость Лобачевского и гиперболическая плоскость. Чтобы отличить первоначальную неевклидову («воображаемую») плоскость, как ее понимал Лобачевский, от обогащенной идеальными точками и прямыми, будем впредь первую называть *плоскостью Лобачевского* (L_1), а название *гиперболической* будем присваивать обогащенной плоскости, которую обозначим через L_2 ; таким образом обыкновенные прямые—это прямые плоскости Лобачевского (L_1). Мы можем теперь сказать, что две прямые плоскости Лобачевского, входящие в состав обога-

щенной плоскости, всегда встречаются, но либо в обыкновенной точке, либо в граничной (бесконечно удаленной в L_2), либо в идеальной точке.

В § 64, рубр. 5 мы отметили, что две прямые в плоскости Лобачевского в интерпретации Клейна взаимно перпендикулярны, если каждая из них

проходит через полюс другой относительно абсолюта. Правда, это было установлено только для кругового абсолюта, но это предложение остается в силе и при любом абсолюте. В самом деле, если в плоскости L_2 с абсолютом ω (черт. 34) произведем гармоническую гомологию с осью XU и с центром в полюсе P прямой XU , то эта гомология преобразует ω в себя и оставит инвариантными прямые AP , XU ; углы NAH и HAP совместятся друг с другом, а потому они прямые. Отсюда ясно, что из точки M плоскости Лобачевского (L_2) проходит к любой прямой p , в ней лежащей, один и только один перпендикуляр. В самом деле, в интерпретации этот перпендикуляр должен проходить через точку M и полюс P прямой p . И так как точка M всегда отлична от P , то требуемым перпендикуляром служит (обыкновенная) прямая MP и только она.



Черт. 34.

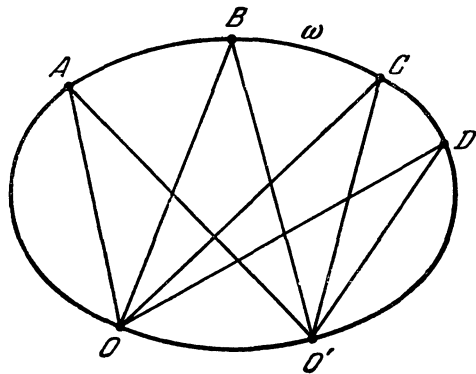
В гиперболической плоскости L_2 (расширенной) мы по определению будем считать две прямые (не обязательно, чтобы обе были обыкновенными) взаимно перпендикулярными, если одна из них проходит через полюс другой (конечно, относительно абсолюта). На черт. 35 изображены взаимно перпендикулярные прямые, из которых: 1) или обе обыкновенные; 2) или одна обыкновенная, а другая граничная; 3) или одна обыкновенная, а другая идеальная; 4) наконец, граничная прямая может рассматриваться как перпендикулярная сама к себе. Так как полюсы идеальных прямых лежат внутри абсолюта, а сами прямые вне его, то никакие две идеальные прямые не могут быть взаимно перпендикулярными. Точно так же не могут быть взаимно перпендикулярными идеальная и граничная прямые или две различные граничные прямые. Заметим, что при заданном абсолюте ω перпендикулярность двух прямых определяется проективными средствами.

Положим теперь, что точка M (черт. 35) есть идеальная точка и p — идеальная же прямая. Тогда из приведенных выше соображений следует, что через точку M проходит один и только один перпендикуляр к прямой p , а именно прямая MP . Дело обстоит не так, если M есть идеальная точка, а p — обыкновенная прямая. Если точка M не совпадает с полюсом P прямой p , то перпендикуляром из точки M к прямой p служит прямая MP и только она. Но если точка M совпадает с полюсом P (что в рассматриваемом случае может иметь место), то положение меняется: каждая прямая, соединяющая точку M с любой точкой прямой p , перпендикулярна к ней. И обратно, перпендикуляр к прямой p из любой ее точки в этом случае проходит через ее полюс. Если ограничиться отрезком прямой p , лежащим внутри абсолюта, т. е. прямой в L_2 , то все перпендикуляры к ней проходят через одну и ту же идеальную точку P . Это проливает новый свет

вают как связки прямых, сходящихся в обыкновенной, граничной или идеальной точке.

В связи с новой терминологией остановимся на соображениях, которые вновь приведут к группе преобразований плоскости, оставляющей инвариантным данное коническое сечение. Мы здесь покажем, как к этой группе можно придти чисто геометрически и этим путем не только обнаружить свойства этих преобразований, найденные выше аналитически, но и установить некоторые новые их особенности, которые нам понадобятся ниже.

4. Группа проективных преобразований конического сечения. В предыдущем параграфе была аналитически установлена группа проективных преобразований плоскости, оставляющих инвариантным заданное овальное коническое сечение. Каждое из них производит некоторое преобразование точек этого конического сечения. Мы можем, следовательно, говорить о проективных преобразованиях данного конического сечения в себя, о группе таких преобразований так же, как мы говорили выше о преобразованиях прямой в плоскости. В таком именно понимании может быть непосредственно установлена группа проективных преобразований данного конического сечения. К этому приводят следующие простые соображения.



Черт. 36.

В расширенной евклидовой плоскости на коническом сечении ω возьмем произвольную точку O и четыре переменные точки A, B, C, D (черт. 36). Двойное отношение прямых $\{OA, OB; OC, OD\}$ будем называть двойным отношением этих четырех точек конического сечения относительно точки O . Можно, однако, показать, что оно не зависит от выбора точки O на этом коническом сечении ω . Это прежде всего ясно в случае, когда ω есть окружность. В самом деле, двойное отношение, о котором идет речь, зависит только от углов AOC, BOD, BOC, AOD , вписанных в ω . В случае окружности эти углы не меняются, когда точка O переносится в любую другую ее точку O' . Если ω рассматривать как сечение круглого конуса K и через ω' обозначать круговое сечение этого конуса (черт. 37), то двойное отношение $\{OA, OB; OC, OD\}$ равно двойному отношению $\{O'A', O'B'; O'C', O'D'\}$ лучей, которые получаются при проектировании OA, OB, OC, OD из вершины S конуса на плоскость круга ω' ; соотносительно этому двойное отношение $\{OA, OB; OC, OD\}$ называют двойным отношением точек A, B, C, D конического сечения. Точечное преобразование конического сечения называется проективным, если оно сохраняет (оставляет инвариантным) двойное отношение любых четырех его точек.

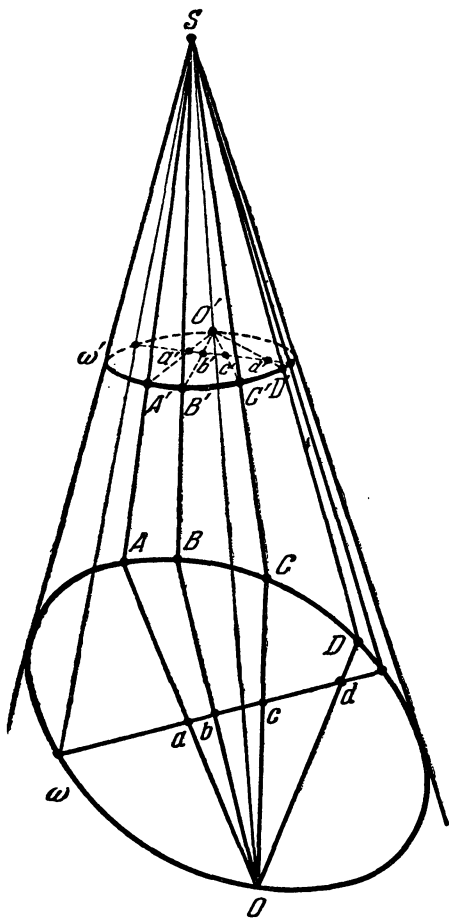
Если на ω фиксируем точку O , то определится соответствие между точками, лежащими на ω , и прямыми пучка, проходящими через O : каждой точке A этого сечения соответствует определенный луч OA пучка и обратно — каждому лучу OA соответствует определенная

точка A кривой ω . Вместе с тем каждому проективному преобразованию пучка O соответствует проективное преобразование конического сечения. Так как проективное преобразование пучка определяется заданием трех лучей, соответствующих трем фиксированным лучам пучка, то ясно, что проективное преобразование конического сечения ω определяется заданием трех его точек, которые соответствуют в этом преобразовании трем фиксированным

точкам линии ω . В связи с этим важно показать, как по данным трем точкам A', B', C' конического сечения, которые соответствуют фиксированным точкам A, B, C , разыскать точку D' , соответствующую четвертой данной точке D конического сечения. Это приведет нас к некоторым интересным свойствам проективного преобразования конического сечения.

5. Ось и центр проективного преобразования конического сечения.

Пусть A, B, C будут три различные точки овального конического сечения (черт. 38), A', B', C' — соответствующие им точки того же конического сечения при проективном его преобразовании Φ . Точку пересечения двух прямых AB' и BA' будем называть точкой скрещения двух пар точек AB и $A'B'$, соответствующих друг другу при преобразовании Φ . Трем точкам A, B, C и соответствующим им точкам A', B', C' принадлежат таким образом три точки скрещения: L, M, N , получающиеся соответственно в пересечении прямых BC' и CB' , AC' и CA' , AB' и BA' (черт. 38). Рассматривая теперь вписанный в коническое сечение пascalев шестиугольник $AC'BA'CB'$, заключаем, что точки L, M, N пересечения его противоположных сторон лежат на одной



Черт. 37.

прямой.

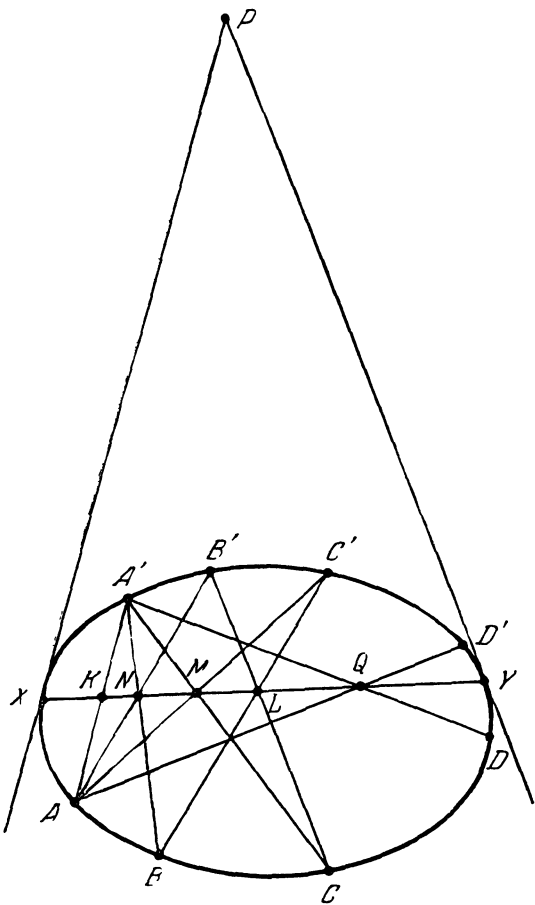
Пусть теперь D — произвольная четвертая точка конического сечения. Положим, что прямая $A'D$ пересекает прямую LMN в точке Q , а прямая AQ встречается коническое сечение в точке D' . Легко видеть, что D' есть точка, соответствующая D в проективном преобразовании $A, B, C \rightarrow A', B', C'$. В самом деле, пусть K будет точка пересечения прямых AA' и LMN ; тогда точки A, B, C, D имеют двойное отношение $\{AB, CD\}$, равное двойному отношению $\{KN, MQ\}$ проекций точек A, B, C, D из A' на NML . Но эти четыре точки в свою очередь имеют то же двойное отношение, что и точки A', B', C', D' (проекции точек K, N, M, Q на коническое сечение из точки A). Следовательно, точка D'

действительно соответствует точке D в рассматриваемом проективном преобразовании $A, B, C \rightarrow A', B', C'$. Таким образом, если даны три точки абсолюта, соответствующие трем заданным его точкам, то этим определяется проективное преобразование этого конического сечения. Точка Q (черт. 38) есть точка скрещения пар соответственных точек AD и $A'D'$; она лежит на той же прямой LMN ; отсюда легко заключить, что точки скрещения любых двух пар соответственных точек этого проективного соответствия лежат на одной прямой. Эта прямая называется осью проективного преобразования, установленного на коническом сечении, а ее полюс P относительно ω называется центром этого преобразования. Ось преобразования может служить обыкновенная, граничная или идеальная прямая; соответственно этому центром служит идеальная, граничная или обыкновенная точка. Если точка D есть конечная точка хорды XY , то точка D' совпадает с D ; иначе говоря, конечная точка остается при этом преобразовании инвариантной.

Обратно, если точка D конического сечения остается при проективном его преобразовании инвариантной, то она принадлежит оси этого преобразования. В самом деле, точка Q скрещения пар точек AD и $A'D'$, т. е. точка пересечения прямых AD' и

$A'D$ лежит на оси. Но если точка D' совпадает с D , то соответствующая точка скрещения — общая точка прямых AD' и $A'D$ — совпадает с точкой D , которая поэтому лежит на оси.

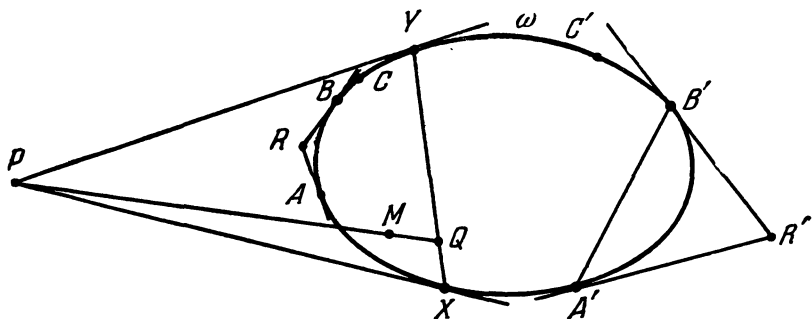
Из изложенного следует, что три различные точки конического сечения могут при проективном его преобразовании оставаться инвариантными только в том случае, если это преобразование тождественное (совершенно аналогично тому, как это имеет место при проективном преобразовании прямой). Если поэтому проективное преобразование конического сечения оставляет инвариантными две его точки, то прямая, соединяющая эти две точки, есть ось преобразования (преобразование имеет осью обыкновенную прямую). Если преобразование оставляет инвариантной только одну точку конического сечения, то осью



Черт. 38.

служит касательная к нему в этой точке; инвариантная точка служит центром преобразования. Если преобразование не оставляет инвариантной ни одной точки конического сечения, то осью его служит идеальная прямая¹⁾).

6. Проективное преобразование плоскости, вызываемое проективным преобразованием овального конического сечения. Сохраняя прежние обозначения, предположим, что проективное преобразование S овального конического сечения ω преобразует три различных его точки A, B, C в A', B', C' (черт. 39). Если R и R' — полюсы прямых AB и $A'B'$, то пусть T будет проективное преобразование плоскости этого конического сечения, относящее точкам A, B, C, R точки A', B', C', R' ,



Черт. 39.

R' ; оно вполне определяется этим заданием. С другой стороны, как хорошо известно, точками A, B, C и полюсом R коническое сечение ω однозначно определяется. Но точками A', B', C', R' определяется то же коническое сечение, следовательно, преобразование T оставляет коническое сечение ω инвариантным, а так как оно, конечно, преобразует его точки проективно, то оно приводит к тому же преобразованию S конического сечения. Иначе говоря, преобразованием S овального конического сечения ω определяется проективное преобразование T его плоскости, вызывающее именно это преобразование конического сечения. Группа преобразований конического сечения приводит к тем же преобразованиям плоскости, которые составляют группу автоморфизмов конического сечения ω при построении интерпретации геометрии Лобачевского. Конечно, при каждом из этих автоморфизмов инвариантны соответствующие ему ось и центр.

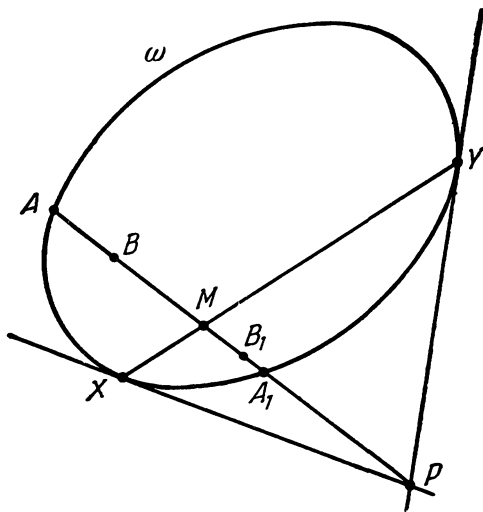
Всякая обыкновенная точка M , которая остается при преобразовании T плоскости в покое, либо совпадает с центром P соответствующего преобразования S , либо лежит на его оси. В самом деле, если точка M не совпадает с центром P и не лежит на оси XY , то преобразование S оставляет прямую MP инвариантной; поэтому инвариантной остается также пересечение Q прямой MP с осью преобразования. Но в таком случае на прямой MP остаются в покое три точки, а следовательно, все остальные точки, в том числе точки ее пересечения с коническим сечением. Это означало бы, что прямая MP

¹⁾ В первом случае преобразование обыкновенно называют гиперболическим, во втором — параболическим, в третьем — эллиптическим.

служит осью этого преобразования и содержит точку M вопреки предположению.

Мы будем в дальнейшем рассматривать преобразование S конического сечения вместе с соответствующим ему преобразованием T всей его плоскости. Поскольку преобразованием T определяется преобразование S , мы можем говорить о центре и оси преобразования T . Это приводит к классификации автоморфизмов плоскости L_2 , т. е. таких проективных преобразований, которые переводят абсолют в себя.

7. Отражение плоскости L_2 от прямой. Точки X, Y оси преобразования S конического сечения остаются при этом преобразовании



Черт. 40.

инвариантными. Поэтому здесь возможны два случая: либо кроме этих точек при соответствующем преобразовании T плоскости ни одна точка оси не остается инвариантной, либо инвариантны все ее точки, ибо при трех инвариантных точках прямой в проективном преобразовании остаются инвариантными все точки прямой. С этого последнего случая мы и начнем.

Поскольку все точки оси инвариантны, то инвариантными остаются все прямые, соединяющие центр преобразования P — полюс оси XY — с ее точками; иначе говоря, остаются инвариантными все прямые PM , перпендикулярные к оси (черт. 40). Если при этом остается также инвариантной еще одна точка конического сечения, то инвариантными остаются все ее точки, а вместе с тем все точки плоскости. Оставляя этот случай тождественного преобразования в стороне, мы видим, что каждая точка A конического сечения переходит (черт. 40) в точку A_1 , которую в гиперболической плоскости следует считать симметричной точке A относительно оси XY . Основанием к этому служит то обстоятельство, что всякая обыкновенная точка B в L_2 переходит в точку B_1 , «симметричную» ей относительно оси XY ($BM \perp XY$, $B_1M = BM$, где перпендикулярность и равенство понимаются в смысле метрики L_2). Описанным преобразованием осуществляется в L_2 о т р а ж е н и е

относительно оси. Обратно, если преобразование осуществляет в $\mathcal{L}_2$ отражение от прямой, то эта прямая есть ось преобразования, потому что остаются в покое точки ее пересечения с коническим сечением. Итак, отражение плоскости $\mathcal{L}_2$ от прямой имеет место тогда и только тогда, когда этой прямой служит ось преобразования, осуществляющего отражение, а центром — полюс оси.

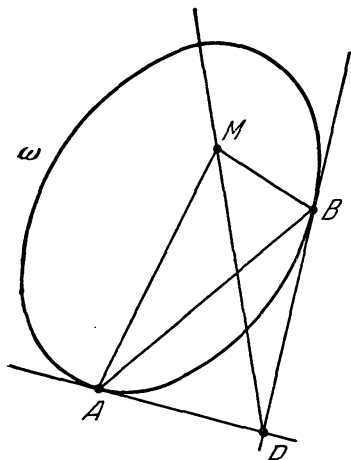
Проведя через полюс P произвольную прямую, пересекающую коническое сечение (абсолют) в точках A и A_1 , определяем преобразование тем, что точки X, Y на оси остаются в покое, а точка A переходит в A_1 ; оно и осуществляет отражение плоскости $\mathcal{L}_2$ от заданной прямой (оси). Заметим, что при этом точка A_1 обратно переходит в A , преобразование представляет собой инволюцию как на каждой секущей прямой AA_1 , проходящей через полюс, так и на самом коническом сечении.

В тесной связи с этим находится следующее построение биссектрисы угла. Если M есть произвольная точка в $\mathcal{L}_2$ (черт. 41), лучи MA и MB пересекают коническое сечение ω в точках A и B , а P — полюс прямой AB , то прямые AP и BP касаются ω в точках A и B . Отражение от прямой MP совмещает прямую PA с PB , приводит точку A в B , и обратно; угол AMP в $\mathcal{L}_2$ равен (конгруэнт-

тен) углу BMP , т. е. MP есть биссектриса угла AMB . Мы приходим к такому предположению: если стороны угла AMB в $\mathcal{L}_2$ встречаются абсолют ω в точках A и B , то биссектриса этого угла в $\mathcal{L}_2$ проходит через полюс прямой AB .

8. Скольжение плоскости $\mathcal{L}_2$ вдоль прямой. Положим, что при преобразовании S конического сечения и соответствующем преобразовании T его плоскости остаются инвариантными только точки X, Y пересечения оси с абсолютом. Так как при этом точки оси могут только замещать друг друга, то и здесь пучок прямых, перпендикулярных к оси, остается инвариантным, однако лишь в том смысле, что одни прямые этого пучка переходят в другие. Подробнее (черт. 42): если P попрежнему означает полюс прямой XU и точка M оси переходит в точку N , то преобразование T совмещает прямую PM с прямой PN . Прямая PM встречается коническое сечение ω в двух точках M_1 и M_2 , а прямая PN встречается ω в точках N_1 и N_2 (на черт. 42 точки M_1, N_1 — по одну сторону от прямой XU , точки M_2, N_2 — по другую).

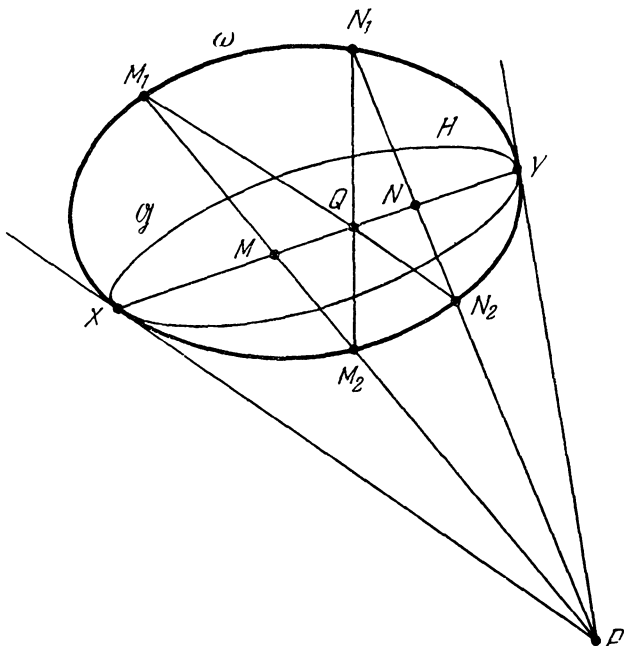
Преобразование S совмещает пару точек M_1 и M_2 с парой точек N_1 и N_2 . Здесь возможны, однако, два преобразования, удовлетворяющие этому требованию: преобразование S_1 , совмещающее точку M_1 с N_1 , а вследствие этого точку M_2 с N_2 (оно определяется соответствием $XUM_1 \rightarrow XUN_1$), и преобразование S_2 , совмещающее точку M_1 с N_2 и вследствие этого M_2 с N_1 (оно определяется соответствием $XUM_1 \rightarrow XUN_2$). При преобразовании $S_1(T_1)$ полуплоскость XUM_1 совмещается с полуплоскостью



Черт. 41.

XYN_1 , т. е. с самою собою; при преобразовании $S_2(T_2)$ полуплоскости XUM_1 и XUM_2 замещают друг друга.

Таким образом при преобразовании $S_1(T_1)$ каждая из дуг XM_1Y и XM_2Y переходит в самое себя, а при преобразовании $S_2(T_2)$ они замещают друг друга. Преобразование типа S_1 осуществляет так называемое скольжение плоскости по оси XU (ср. § 63, рубр. 5), а преобразование S_2 осуществляет скольжение по этой оси, сопровождаемое отражением от той же оси. При преобразовании S_1



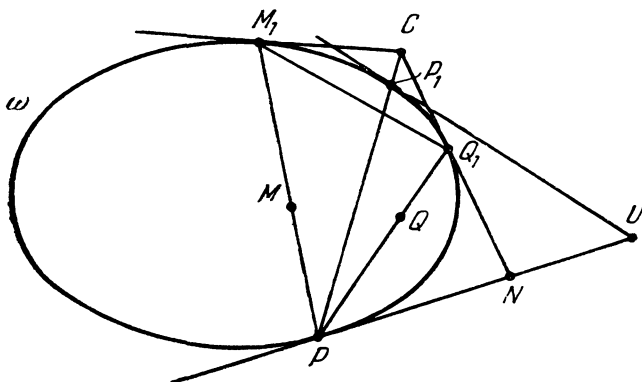
Черт. 42.

всякая эквидистанта GH , имеющая ось преобразования базисной прямой, переходит в самое себя, причем в самое себя преобразуется каждая ветвь эквидистанты; при преобразовании S_2 одна из ветвей такой эквидистанты замещается другой.

9. Вращение плоскости L_2 вокруг обыкновенной ее точки. Во всех рассмотренных выше преобразованиях осью служила обыкновенная прямая, а центром — идеальная точка. Обращаемся теперь к преобразованию, центром которого служит обыкновенная точка; такое преобразование называется вращением или поворотом плоскости L_2 около центра (ср. § 63, рубр. 4). При повороте центр представляет собой инвариантную (неподвижную), точку, других же неподвижных точек в L_2 не существует. В самом деле, если бы кроме центра P оставалась инвариантной еще одна обыкновенная точка P_1 , то инвариантной оставалась бы прямая PP_1 , а вместе с тем и точка Q ее пересечения с идеальной осью. Но при трех инвариантных точках прямой PP_1 оставались бы инвариантными все ее точки, в том числе и точки ее пересечения с коническим сечением. Прямая PP_1 была бы осью преобразования, что в рассматриваемом случае не может иметь места.

Ясно, что при таком повороте в $\mathcal{L}_2$ каждая окружность (конечно, в смысле метрики $\mathcal{L}_2$), имеющая центр в точке P (в центре поворота), остается инвариантной, поскольку не изменяется расстояние точки от центра.

10. Вращение плоскости $\mathcal{L}_2$ вокруг бесконечно удаленной ее точки. Положим, наконец, что центром преобразования T служит точка P на абсолюте (черт. 43) и, значит, осью преобразования — касательная PU в P . Обыкновенной инвариантной точки при этом преобразовании быть не может. Действительно, если бы в $\mathcal{L}_2$ кроме P оставалась бы инвариантной обыкновенная точка Q , то оставалась бы инвариантной



Черт. 43.

прямая PQ , а вместе с тем оставалась бы в покое и точка Q_1 , в которой она встречает коническое сечение ω . Прямая PQ_1 была бы осью преобразования, что в этом случае не может иметь места. По той же причине преобразование T не может иметь инвариантной граничной точки P_1 , отличной от P . Если бы преобразование T имело бы неподвижную идеальную точку C , то ее поляр M_1Q_1 была бы осью преобразования, что снова противоречит предположению. Таким образом преобразования T рассматриваемого вида характеризуются тем, что каждое из них имеет только одну неподвижную точку, лежащую на абсолюте (ср. рубр. 7, 8, 9).

Пусть при исследуемом преобразовании T обыкновенная точка M переходит в точку Q (черт. 43), а следовательно, точка M_1 — в точку Q_1 . Обозначив через C полюс прямой M_1Q_1 относительно абсолюта ω , рассмотрим произведение $S''S'$ отражения S' от прямой PC (в $\mathcal{L}_2$) на отражение S'' от прямой PQ_1 . Оба эти преобразования, следовательно, и их произведение, оставляют точку P неизменной. При преобразовании S' точка M_1 переводится в точку Q_1 , а при преобразовании S'' точка Q_1 инвариантна; поэтому произведение $S''S'$ преобразует точку M_1 в Q_1 . Отличных от P инвариантных точек преобразование $S''S'$ не может иметь, так как такой инвариантной точке A должна была бы как при отражении S' , так и при отражении S'' отвечать одна и та же точка B ; прямая AB при таких условиях должна проходить и через полюс U прямой PC и через полюс N прямой PQ , т. е. совпадать с прямой PU ; на этой прямой пара точек A и B должна делить гармонически как пару точек P, N , так и пару P, U , что невозможно.

Итак, преобразование $S''S'$ имеет только одну неподвижную граничную точку P и переводит точку M_1 в Q_1 ; его центром служит точка P , его осью — прямая PU . Преобразование T обладает всеми теми же свойствами; но заданием центра, оси и пары соответствующих друг другу точек проективное преобразование, оставляющее инвариантным абсолют ω , вполне определяется (рубр. 5). Следовательно, $T = S''S'$.

Теперь мы видим в силу определения преобразований S'' и S' , что точки M и Q симметричны (в $\mathcal{L}_2$) относительно прямой $CP \parallel MP$, а это означает, что на параллельных прямых MP и QP точки M и Q являются соответственными и в смысле § 30, рубр. 2 (ч. I, стр. 241) и, значит, лежат на предельной линии (орцикле) с бесконечно удаленным центром P . Преобразование T в данном случае есть орициклическое смещение плоскости (ч. I, § 33, рубр. 11, стр. 268) или вращение вокруг бесконечно удаленной точки P .

11. Классификация автоморфизмов плоскости $\mathcal{L}_2$. Из изложенного следует, что всякий автоморфизм плоскости $\mathcal{L}_2$ (т. е. проективное преобразование, переводящее ее в самое себя) представляет собой: а) либо отражение от обыкновенной прямой, являющейся осью преобразования; б) либо скольжение по этой оси; в) либо скольжение по оси, сопутствующее отражением от нее; г) либо вращение (поворот) вокруг конечного или бесконечно удаленного центра. Отнесение каждого автоморфизма к одному из этих типов, всегда однозначно выполняемое, мы будем называть канонической классификацией автоморфизмов; она не отличается от той, которая изложена в § 33, рубр. 11 (ч. I, стр. 268) настоящего сочинения.

Скольжение и вращение обыкновенно называют движениями в отличие от отражений, т. е. отражения от прямой, или же от скольжения, сопровождаемого таким отражением.

Движение и отражение существенно отличаются одно от другого следующим признаком. При движении проективное преобразование конического сечения сохраняет его ориентацию, т. е. три точки A, B, C на ω ориентированы так же, как и преобразованные точки A', B', C' ; при отражении точки A', B', C' имеют по сравнению с A, B, C противоположную ориентацию.

12. Разложение автоморфизма плоскости $\mathcal{L}_2$ на отражения от прямой. Рассмотрим сначала скольжение S , приводящее точку M оси XU в точку N (черт. 44). Пусть P будет полюс прямой XU (центр преобразования). Преобразование S совмещает прямую PM с прямой PN , а вместе с этим точку M_1 с точкой N_1 . Рассматриваемое преобразование S , таким образом, производит следующие совмещения:

$$(S) \quad \begin{array}{cccc} X & Y & M & M_1 \\ X & Y & N & N_1 \end{array}$$

Пусть теперь S' будет отражение плоскости $\mathcal{L}_2$ от прямой PC , проходящей через середину (гиперболическую) C отрезка MN ; оно совмещает луч PM с лучом PN , точку M с N и M_1 с N_1 . Ясно дальше, что оно замещает точки X и Y одну другой; это есть инволюция на прямой XU . Преобразование S' производит, следовательно,

следующие замещения:

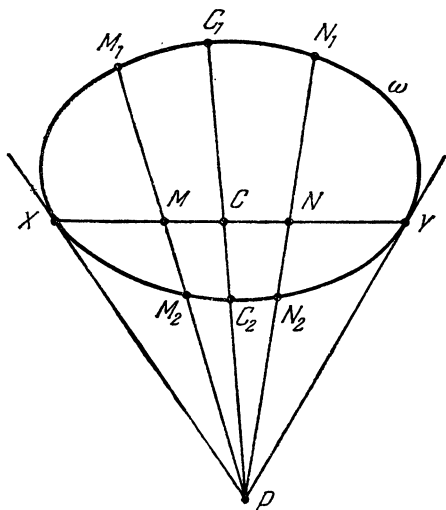
$$(S') \quad \begin{array}{cccc} X & Y & M & N \\ Y & X & N & M \end{array}$$

Пусть, далее, S'' будет отражение от прямой PN . Оно также замещает точки X, Y друг с другом, но точки N и N_1 оставляет в покое. Это преобразование можно обозначить следующим образом:

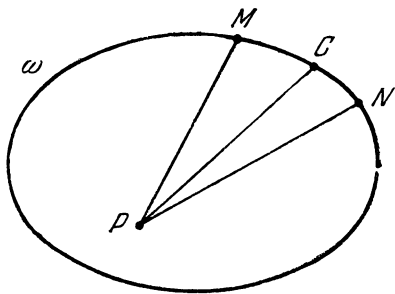
$$(S'') \quad \begin{array}{cccc} X & Y & N & N_1 \\ Y & X & N & N_1 \end{array}$$

Теперь легко видеть, что преобразование $S''S'$ оставляет точки X и Y в покое, а точку M переводит в точку N . Но этими замещениями,

как мы видели (рубр. 8), скольжение S вполне определяется; следовательно, $S = S''S'$. Мы видим таким образом, что скольжение по оси XU оказывается эквивалентным последовательному выполнению двух отражений от прямых, перпендикулярных к XU .



Черт. 44.



Черт. 45.

Вместе с тем автоморфизм плоскости L_2 , осуществляемый преобразованием, осью которого служит обыкновенная прямая, представляет собой либо произведение двух отражений от прямой, если этот автоморфизм есть скольжение по оси, либо произведение трех отражений от прямой, если этот автоморфизм есть скольжение по этой оси, сопутствуемое отражением от нее.

Обращаемся теперь к автоморфизму, который осуществляется преобразованием, имеющим осью идеальную прямую и, следовательно, центром обыкновенную точку, т. е. к вращению вокруг обыкновенной точки P . Положим, что это вращение совмещает луч PM с лучом PN (черт. 45), т. е. производит поворот на угол MPN . Пусть PC будет (гиперболическая) биссектриса угла MPN . Обозначим через S' отражение от прямой PC ; оно совмещает луч PM с лучом PN и, значит, точку M на ω с точкой N . Через S'' обозначим отражение от прямой PN , оно производит совмещения P с P , N с N . Вместе с тем преобразование $S''S'$ оставляет в покое точку P , совмещает луч PM с PN , но не оставляет кроме P ни одной точки в покое. Отсюда следует,

что поворот S эквивалентен последовательному выполнению двух отражений: $S = S''S'$; иными словами, всякое вращение вокруг обыкновенной точки может быть рассматриваемо как произведение двух отражений от прямой.

В рубр. 10 было показано, что поворот вокруг бесконечно удаленной точки может быть разбит на два отражения.

13. Общая теорема о разбиении автоморфизма плоскости L_2 на отражения от прямой. Общий вывод из предыдущих соображений может быть выражен так: всякий автоморфизм плоскости L_2 может быть представлен в виде произведения одного, двух или трех отражений от прямой.

Однако, кроме этого канонического разложения, возможны и многообразные другие разложения рассматриваемого преобразования на отражения от прямой, отличные от канонического. Например, можно внести в разложение произвольное другое отражение от прямой дважды подряд взятое и потому не меняющее исходного преобразования; после этого возможны различные ассоциативные комбинации примененных отражений от прямой.

При всем многообразии возможных разложений данного автоморфизма одна особенность остается неизменной: если преобразование разложено на четное число отражений от прямой, то никакое другое его разложение не может быть составлено из нечетного числа таких отражений, и наоборот; инвариантной, таким образом, остается четность или нечетность числа отражений от прямой, входящих в состав разложения. В самом деле, так как отражение от прямой меняет ориентацию конического сечения на противоположную, то преобразование S , сохраняющее его ориентацию, может быть разбито только на четное число отражений от прямой, преобразование же, меняющее его ориентацию, — только на нечетное число таких отражений.

§ 67. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ В ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО, ВЫПОЛНЯЕМЫЕ НА МОДЕЛИ КЛЕЙНА

1. Постановка задачи. Геометрические построения, изложенные в §§ 47 и 48 первой части, выполняются в плоскости Лобачевского. Выражаясь фигурально, можно сказать, что они предполагают обитателя этой плоскости располагающим линейкой и своими циркулями (обыкновенным циркулем, орициркулем, гиперциркулем), т. е. инструментами, чертящими в этой плоскости кривые постоянной кривизны¹⁾. Так понимали эти построения и Я. Больyai²⁾, а после него Либман (H. Liebmam [43], [44]), Симон (М. Simon [45]) и др. Общая теория этих построений дана Д. Д. Мордухай-Болтовским [46] и развернута его учеником Н. М. Несторовичем [47]. Более поздние работы в этом направлении принадлежат М. В. Гиршовичу [48], [49] и В. Ф. Рогаченко [50].

В 1904 г. М. Гроссман (М. Grossmann) опубликовал работу [51], в которой задача ставится иначе. Плоскость Лобачевского задана в виде ее интерпретации (модели) на евклидовой плоскости внутри овального

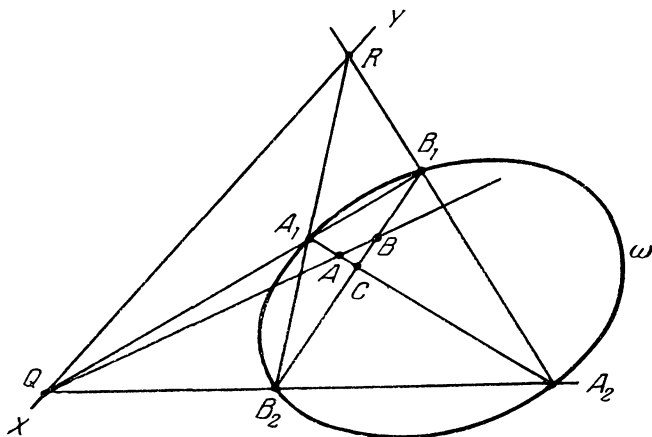
¹⁾ Как указано там же, оказалось, что достаточно располагать только обыкновенным циркулем.

²⁾ Его «Аппендикс» в настоящее время издан на русском языке [42].

конического сечения L_2 и в ней нужно производить построения средствами евклидовой геометрии; задача переносится в евклидову плоскость, как этой интерпретацией в евклидову плоскость перенесена вся геометрия Лобачевского. Гроссман приводит решение основных конструктивных задач в плоскости Лобачевского при таком их понимании. Близкую к этой постановку задачи находим в книге А. С. Смогоржевского [52]. Но в то время как Гроссман в своих построениях пользуется всей плоскостью отображения, А. С. Смогоржевский выполняет построения внутри круга Бельтрами—Клейна. Другие интерпретации, которые будут изложены ниже, влекут за собой и другие построения.

С этим связаны следующие соображения. Поскольку геометрия Лобачевского воспроизведена в евклидовом (или проективном) пространстве, то каждое соотношение геометрии Лобачевского выражает также некоторое соотношение, имеющее место в евклидовой (или проективной) геометрии, и наоборот. В настоящем параграфе изложены основные построения в плоскости Лобачевского, выполняемые в ее интерпретации внутри любого овального конического сечения, и при этом иногда на простейших примерах выясняется применение неевклидовой геометрии к установлению некоторых соотношений, имеющих место в евклидовой или в проективной геометрии. Отсылая читателя, интересующегося ограниченной постановкой задачи, к книге Смогоржевского, мы здесь при построениях пользуемся всей плоскостью отображения; это представляет своеобразный интерес. Единственным инструментом, применяемым в построениях будет линейка.

2. Поворот отрезка вокруг его конечной точки на данный угол. Положим, что при повороте плоскости (L_2) вокруг точки C луч CA перешел в луч CB . Требуется построить точку B , в которую при этом повороте



Черт. 46.

перейдет заданная точка A луча CA (черт. 46). Положим, что лучи CA и CB пересекают абсолют ω в точках A_1 и B_1 , а их продолжения пересекают абсолют соответственно в точках A_2 и B_2 . При рассматриваемом повороте точка A_1 переходит в точку B_1 . Для соответствующего преобразования абсолюта осью служит поляр XU точки C . Осью и парой соответственных точек ($A_1 \rightarrow B_1$) это преобразование опреде-

ляется. Прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в некоторой точке Q (лежащей на XU). Прямая AQ встречает луч CB_1 в требуемой точке B .

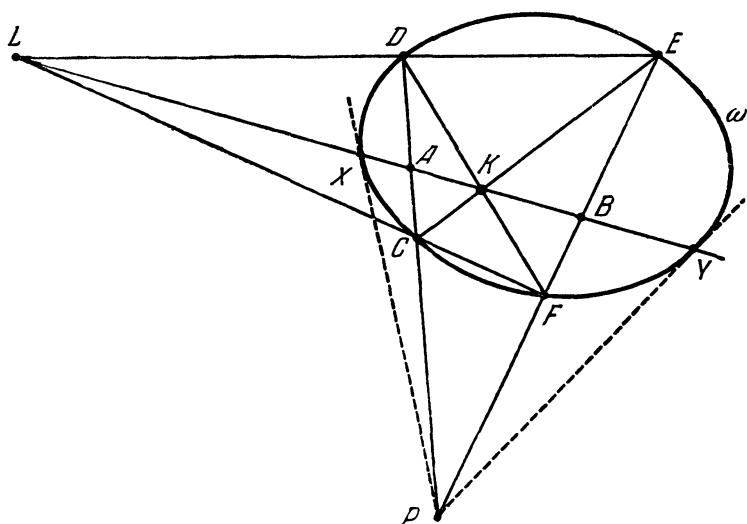
В самом деле, так как точки A_1, A_2, A, C прямой A_1A_2 расположены перспективно относительно точек B_1, B_2, B, C прямой B_1B_2 (проектирование из точки Q на прямую B_1B_2), то

$$\{A_1A_2, AC\} = \{B_1B_2, BC\},$$

а это означает, что в L_2 расстояние CA равно расстоянию CB .

Указанное построение не может быть выполнено, если луч CB составляет продолжение луча CA ; в этом случае требуется другое построение, которое изложено ниже в рубр. 4.

3. Отрезок AB разделить (в L_2) пополам. Рассмотрим в L_2 скольжение $S(T)$ по прямой XU , которое переводит точку A в точку B (черт. 47); XU есть ось соответствующего преобразования. Точки X, Y



Черт. 47.

и полюс P прямой XU (центр преобразования) остаются при этом в покое, а точки C и D переходят соответственно в точки F и E . Точка скрещения K этих двух пар точек, в силу известного свойства четырехугольника, вписанного в коническое сечение (см., например, [53], стр. 94), лежит на оси $XY(AB)$ на полюсе диагональной точки P . Кроме того, K представляет собой середину отрезка AB в L_2 . В самом деле, двойное отношение $\{XY, DE\}$ четырех точек конического сечения равно каждому из двойных отношений лучей

$$\{CX, CY; CD, CE\}$$

и

$$\{FX, FY; FD, FE\}.$$

Пересекая же оба пучка прямой XU , видим, что упомянутые двойные отношения равны двойным отношениям соответствующих точек этой прямой:

$$\{XY, AK\} = \{XY, KB\},$$

а это означает, что в L_2 отрезки AK и KB равны, т. е. K есть середина отрезка AB .

По поводу этого построения заметим, что в силу известного свойства четырехугольника, вписанного в коническое сечение, на поляре XU диагональной точки P лежит не только вторая диагональная точка K , но и третья L , причем K и L делят гармонически как пару A, B , так и пару X, Y . Точку L иногда называют идеальной серединой отрезка AB . Поэтому можно сказать: в L_2 обыкновенная и идеальная середины отрезка AB делят гармонически как точки A, B , так и точки пересечения прямой AB с абсолютом.

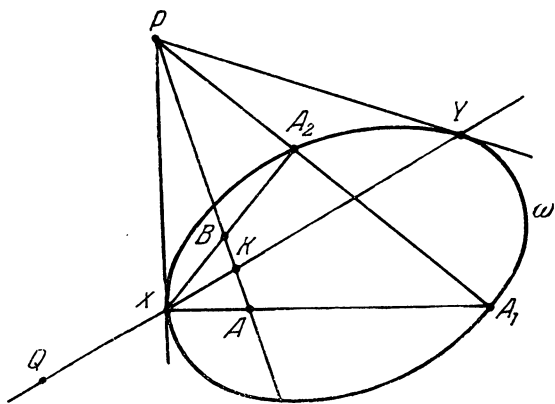
Вместе с тем, если A, B и X, Y суть четыре коллинеарные точки в E_2 , не разделяющие друг друга (так что две из них, скажем, A и B , лежат между двумя другими), то существует пара точек, делящая гармонически как одну, так и другую пару точек. Чтобы выполнить их построение, достаточно на XU построить коническое сечение, скажем, окружность, и, приняв его за абсолют, произвести предыдущее построение. Это предложение имеет тем большее значение, что оно послужило основанием всей интерпретации неевклидовой геометрии в коническом сечении (ср. § 70).

4. Завершение построения, рассмотренного в рубр. 2. Изложенные соображения служат также для завершения построения, которому была посвящена рубр. 2. Речь идет о построении (в L_2) на продолжении луча KA точки B таким образом, чтобы $KB = KA$; в этом случае построение рубр. 2, как там указано, не выполняется. Но теперь ясно, как его в этом случае осуществить. Приведа прямую AK к пересечению с абсолютом в точках X и Y (черт. 47), строим точку L , гармонически сопряженную с K относительно точек X и Y . После этого строим точку B , гармонически сопряженную с A относительно точек K и L (построение точки B ясно из черт. 47). Мы имеем, таким образом, возможность

осуществить поворот отрезка KA на любой угол AKB даже и в том случае, когда этот угол равен π . Иной способ последнего построения связан со следующей задачей.

5. Построение в L_2 отражения данной точки от данной прямой. В L_2 дана прямая (обыкновенная) XU и требуется построить отражение любой точки A от этой прямой (черт. 48). Пусть P будет полюс прямой XU ; K — точка пересечения AP с XU . При отражении от оси XU точка A перейдет в некоторую точку B луча KP , составляющего продолжение луча KA .

Пусть A_1 будет другая точка встречи прямой XA с абсолютом. При отражении от прямой XU точка A_1 перейдет во вторую

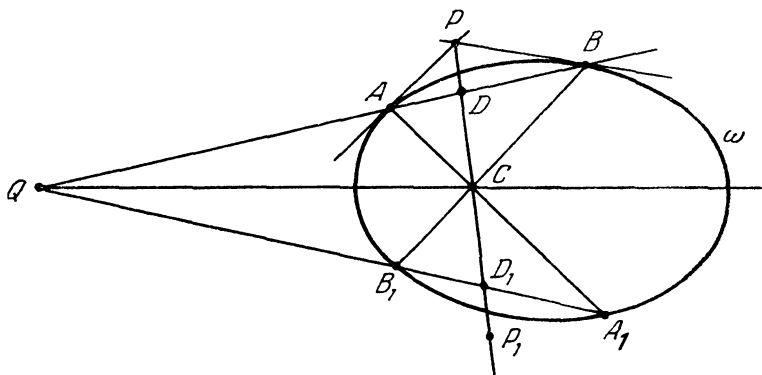


Черт. 48.

луч CB совмещается с CB' , точка A с A' , точка B с B' , то точка A_1 совмещается с A'_1 , точка B_1 с B'_1 . При обратном повороте, приводящем A' в A , точка B' переходит в B , A'_1 в A_1 , B'_1 в B_1 . Поэтому точка скрещения двух пар $A'B'_1$ и AB_1 , т. е. точка пересечения прямых $A'B_1$ и AB'_1 лежит на оси. Построив поэтому точку Z , как пересечение прямой $A'B_1$ с осью XU , мы получим в пересечении прямой AZ с абсолютом точку B'_1 , а по ней и точку B' .

Вместе с тем решается и более общая задача, связанная с поворотом вокруг точки C на угол ACA' : в какую точку P' приходит произвольная точка P . Построив луч CP' , в который перейдет луч CP , определим на нем, как показано в рубр. 2, точку P' .

8. Данный угол разделить пополам (построить биссектрису данного угла). Если A и B (черт. 50) суть точки пересечения сторон данного угла ACB с абсолютом, P — полюс прямой AB , и CP встречает прямую



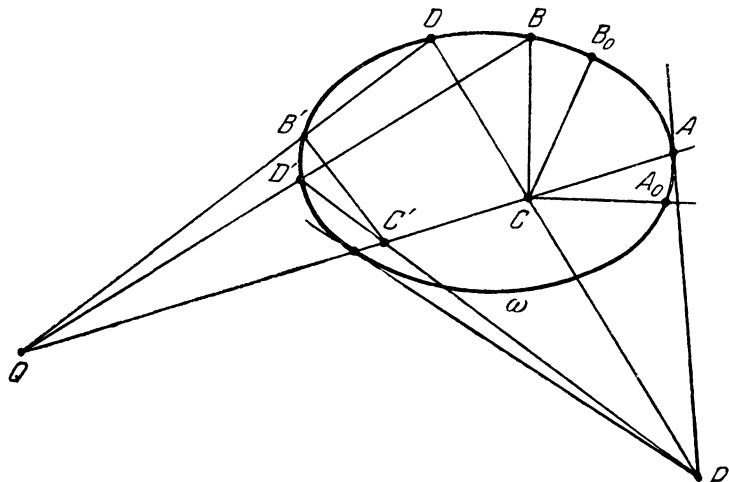
Черт. 50.

AB в точке D , то в L_2 $\angle ACP = \angle BCP$, как это собственно уже было показано в рубр. 7 предыдущего параграфа. Продолжение CP_1 луча CP делит пополам угол A_1CB_1 , а потому проходит через полюс P_1 прямой A_1B_1 . Прямые AB и A_1B_1 , гиперболически перпендикулярные к прямой PP_1 , пересекаются поэтому в полюсе Q прямой PP_1 ; в L_2 $QC \perp CD$, следовательно, QC есть биссектриса углов ACB_1 и BCA_1 , смежных с ACB .

9. Перенести вершину данного угла в данную точку. Пусть A_0CB_0 данный угол (черт. 51); при точке C' построим угол $B'C'A$ (A — точка пересечения луча $C'C$ с абсолютом), равный углу B_0CA_0 . Поворотом вокруг точки C мы можем совместить луч CA_0 с лучом CA ; луч CB_0 займет положение CB , которое можно построить, как указано в рубр. 7. Теперь требуется при точке C' построить угол $AC'B'$, равный углу ACB . Для этого скольжением по прямой CC' приведем точку C в C' ; если при этом точка B придет в B' , то угол ACB совместится с $AC'B'$. Эти углы будут в L_2 равны, т. е. $C'B'$ будет второй стороной требуемого угла. Чтобы последнее построение выполнить, заметим, что прямая CC' будет осью, ее полюс P — центром этого скольжения. Поэтому прямая PC (при этом скольжении) перейдет в PC' , а точка D ее пересечения с абсолютом

перейдет в соответствующую точку D' . Точка Q пересечения прямых DB' и $D'B$ (точка скрещения пар точек BD и $B'D'$) будет лежать на оси. Так как точки B и D' нам известны, то пересечением прямой BD' с осью CC' определится точка Q ; пересечением же прямой DQ с абсолютном определяется точка B' .

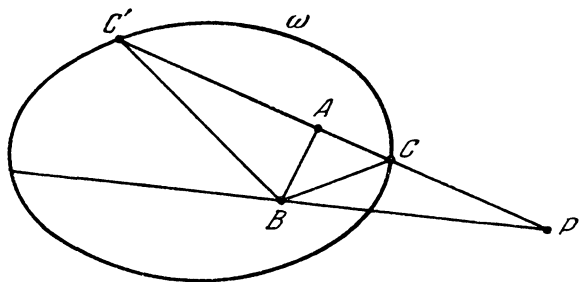
Таким образом, мы можем перенести угол в новое положение так, чтобы вершина совпала с данной точкой, а одна из сторон пошла по лучу,



Черт. 51.

ведущему из новой вершины в старую. Для того чтобы придать этой стороне другое заданное направление, остается выполнить поворот вокруг новой вершины.

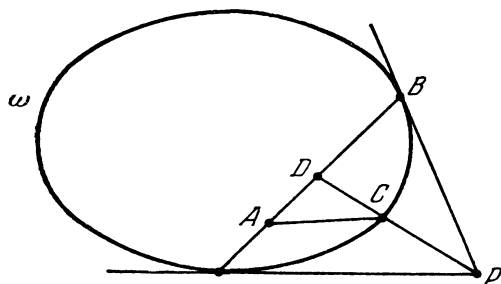
10. Построить угол параллельности, соответствующий данному отрезку, и отрезок параллельности, соответствующий данному острому углу. Если AB есть данный отрезок (черт. 52), P — полюс прямой AB ,



Черт. 52.

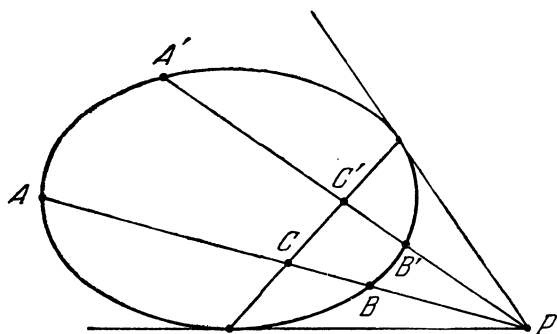
то прямая AB в L_2 перпендикулярна к AP . Если прямая AP пересекает абсолют ω в точках C и C' , то прямые BC и BC' в L_2 параллельны CC' . Углы CBA и $C'BA$ в L_2 равны, и каждый из них определяет угол параллельности, соответствующий отрезку AB .

Если BAC — данный угол и P — полюс прямой AB (черт. 53), то прямая PC встречает AB в точке D под прямым углом. AD есть отрезок параллельности, отвечающий углу CAB .



Черт. 53.

В тесной связи с этим стоит и построение общего перпендикуляра к двум расходящимся прямым AB и $A'B'$ в L_2 . Если P есть (идеальная)



Черт. 54.

точка пересечения прямых AB и $A'B'$ (черт. 54), то поляр CC' точки P удовлетворяет требованию, потому что в L_2 $AB(PC) \perp CC'$ и $A'B'(P'C') \perp CC'$.

ГЛАВА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ

ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

§ 68. ИНВАРИАНТЫ УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ L_2

1. Порядок алгебраической линии на плоскости L_2 . В евклидовой геометрии плоскости линии делятся, как известно, по виду их уравнения в декартовых координатах на алгебраические и трансцендентные. Особая роль, которую играют при этом декартовы координаты, объясняется, конечно, тем обстоятельством, что именно в этих координатах уравнение любой прямой линейно. В случае плоскости Лобачевского мы, исходя из тех же соображений, должны положить в основу бельтрамиевы координаты, так как в бельтрамиевых координатах прямые плоскости Лобачевского выражаются линейными уравнениями (§ 42, рубр. 7). При этом линии обычно рассматриваются на всей расширенной плоскости Лобачевского L_2 (§ 66, рубр. 1), что с необходимостью приводит к пользованию однородными бельтрамиевыми координатами.

Итак, алгебраической линией на плоскости L_2 называется линия, заданная уравнением вида

$$F(x, y, z) = 0, \quad (1)$$

где $F(x, y, z)$ — однородная целая рациональная функция (многочлен) от однородных бельтрамиевых координат x, y, z точки плоскости L_2 . Степень однородного многочлена $F(x, y, z)$ называется, как и в случае евклидовой плоскости, порядком линии (1) (ср. § 43, рубр. 4).

В дальнейшем мы ограничимся изучением линий второго порядка, имея своей конечной целью их классификацию по отношению к гиперболическим движениям.

Уравнение абсолюта плоскости L_2 запишем в виде

$$\omega(x, y, z) = 0, \quad (2)$$

где

$$\omega(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 - z^2. \quad (3)$$

Точка $M(x, y, z)$ плоскости L_2 будет обыкновенной, если $\omega(x, y, z) < 0$, граничной, если $\omega(x, y, z) = 0$, и идеальной, если $\omega(x, y, z) > 0$ (см. § 66, рубр. 1).

Для сокращения записей мы будем иногда пользоваться координатами прямой (ср. § 60, рубр. 6). Если прямая μ задана в бельтрамиевых координатах уравнением

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \quad (4)$$

то числа α , β и γ называют однородными бельтрамиевыми координатами прямой μ и записывают это так: $\mu(\alpha, \beta, \gamma)$. Для точки $M(x, y, z)$ полярной относительно абсолюта (2) служит прямая $(x, y, -z)$. Поэтому при $\omega(\alpha, \beta, \gamma) > 0$ прямая μ — обыкновенная, при $\omega(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ — граничная, при $\omega(\alpha, \beta, \gamma) < 0$ — идеальная.

2. Матрица и дискриминант уравнения линии второго порядка. Согласно предыдущему, линия второго порядка плоскости L_2 имеет уравнение

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0, \quad (5)$$

где a, b, c, d, e, f — действительные числа, из которых, по крайней мере, одно отлично от нуля. Составленная из них матрица

$$M = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \quad (6)$$

называется матрицей уравнения линии второго порядка (5), а определитель этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \quad (7)$$

— дискриминантом уравнения линии (5); наконец, ранг r матрицы M есть ранг уравнения той же линии.

Ниже, в §§ 68 и 69, левая часть уравнения (5) всегда будет обозначаться через $g(x, y, z)$, а алгебраические дополнения элементов $a, b, \dots, f$ определителя (7) — соответственно через $A, B, \dots, F$; A, C, F называются главными минорами определителя Δ .

Если мы умножим обе части уравнения (5) на произвольное (действительное) число $\xi \neq 0$, то матрица M заменится на ξM , дискриминант нового уравнения будет равен $\xi^3 \Delta$, ранг же r останется неизменным.

Подвергнем плоскость L_2 гиперболическому движению; тогда линия (5) преобразуется в другую линию второго порядка. В соответствии с общими установками Эрлангенской программы (§ 60) геометрические свойства линии второго порядка будут выражаться такими равенствами, связывающими коэффициенты $a, b, \dots, f$ уравнения линии, которые остаются инвариантными (неизменными) при любом гиперболическом движении. Указанного рода равенства строятся обычно из инвариантов уравнения линии второго порядка относительно гиперболических движений; так называются выражения $J(a, b, \dots, f)$, составленные из коэффициентов $a, b, \dots, f$ уравнения (5), для которых справедливо соотношение

$$J(a', b', \dots, f') = J(a, b, \dots, f),$$

где $a', b', \dots, f'$ — значения, которые получают коэффициенты уравнения (5) после преобразования координат x, y, z , отвечающего какому угодно гиперболическому движению. Выражение $J(a, b, \dots, f)$, вообще говоря, может изменять свое значение при умножении обеих частей уравнения (5) на число $\xi \neq 0$; если же оно и при этом остается неизменным, то мы имеем инвариант самой линии второго поряд-

ка. Инварианты уравнения линии второго порядка и будут обнаружены нами в дальнейшем. Предварительно необходимо снова вернуться к рассмотренному в §§ 63 и 66 вопросу о гиперболических движениях.

3. Гиперболические движения в однородных бельтрамиевых координатах. В § 63 рубр. 1 (формула (1)) эти движения были даны в неоднородных координатах; в однородных бельтрамиевых координатах уравнения, определяющие гиперболическое движение, запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\ y' &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \\ z' &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где коэффициенты $\alpha_1, \dots, \gamma_3$ связаны условиями (§ 63, (8a) и (8b), а также § 63, рубр. 2):

$$\gamma_3 > 0, \quad (9)$$

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2 = 1, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 - \gamma_2^2 = 1, \quad \alpha_3^2 + \beta_3^2 - \gamma_3^2 = -1, \quad (10)$$

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2 = 0, \quad \alpha_1 \alpha_3 + \beta_1 \beta_3 - \gamma_1 \gamma_3 = 0, \quad \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 - \gamma_2 \gamma_3 = 0; \quad (11)$$

в силу равенств (10) и (11) из уравнений (8) следует:

$$x'^2 + y'^2 - z'^2 = x^2 + y^2 - z^2. \quad (12)$$

Определитель преобразования (8) обозначим через δ :

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}; \quad (13)$$

так как гиперболические движения соответствуют преобразованиям Кэли—Клейна первого рода (§ 63, рубр. 2), то определитель

$$\delta = 1. \quad (14)$$

Напомним еще, что из соотношений (10) и (11) следуют (§ 63, (8a')) также и равенства:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = 1, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2 = 1, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 - \gamma_3^2 = -1. \quad (15)$$

Как показано в §§ 63 и 66, существует несколько типов гиперболических движений; чтобы узнать, к какому из них принадлежит данное гиперболическое движение, достаточно найти его неподвижные точки. Если $P(x, y, z)$ — такая точка, то уравнения (8) должны дать:

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y, \quad z' = \lambda z,$$

подставляя в последние равенства вместо x', y', z' их выражения из (8), придем к системе из трех однородных линейных уравнений для неизвестных x, y, z :

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_1 - \lambda)x + \alpha_2 y + \alpha_3 z &= 0, \\ \beta_1 x + (\beta_2 - \lambda)y + \beta_3 z &= 0, \\ \gamma_1 x + \gamma_2 y + (\gamma_3 - \lambda)z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

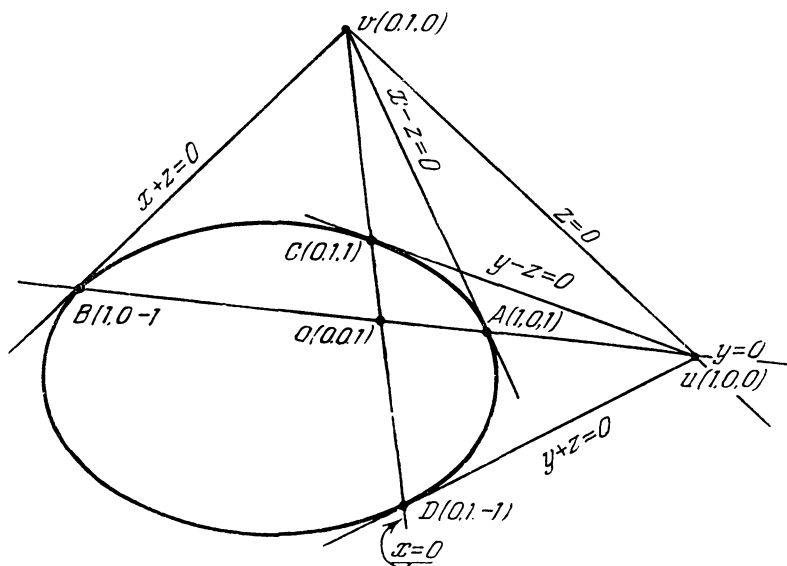
которая должна допускать ненулевые решения. Отсюда следует, что ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 - \lambda & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

Найдя λ из кубического уравнения (17), мы сможем определить координаты неподвижной точки P из упомянутой системы трех линейных уравнений.

Замечая, что прямая остается неизменной при гиперболическом движении S тогда и только тогда, когда ее полюс относительно абсолюта при движении S переходит сам в себя, мы по неподвижным точкам движения S легко найдем и его неподвижные прямые.

4. Вращения вокруг точки и скольжения вдоль прямой. При исследовании линий второго порядка нам понадобятся еще некоторые специальные виды гиперболических движений.



Черт. 55.

Вращения вокруг точки $O(0, 0, 1)$ на угол θ задаются уравнениями (см. § 63, рубр. 4 и § 62, (18)):

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \theta - y \sin \theta, \\ y' &= x \sin \theta + y \cos \theta, \\ z' &= z. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Уравнение (17) принимает вид

$$(1 - \lambda)(1 - 2\lambda \cos \theta + \lambda^2) = 0$$

и имеет (при $\theta \neq 0$, $\theta \neq \pi$) один действительный корень: $\lambda_1 = 1$, и два мнимых корня: $\lambda_2 = \cos \theta + i \sin \theta$ и $\lambda_3 = \cos \theta - i \sin \theta$. На основании этого из уравнений (16) найдем, что для движения (18) (если $\theta \neq 0$ и $\theta \neq \pi$) неподвижными являются только одна (действительная) точка $O(0, 0, 1)$ (черт. 55) и одна (действительная) прямая $z = 0$ (поляра точки O по отношению к абсолюту). Этот случай гиперболического движения представлен на черт. 56.

Скользяние вдоль прямой $y=0$ определяется уравнениями (см. § 63, рубр. 5):

$$\left. \begin{aligned} x' &= px + qz, \\ y' &= y, \\ z' &= qx + pz, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где

$$p > 0, \quad p^2 - q^2 = 1. \quad (19')$$

В силу (19') мы можем положить: $p = \operatorname{ch} \varphi$, $q = \operatorname{sh} \varphi$; тогда уравнения (19) примут вид:

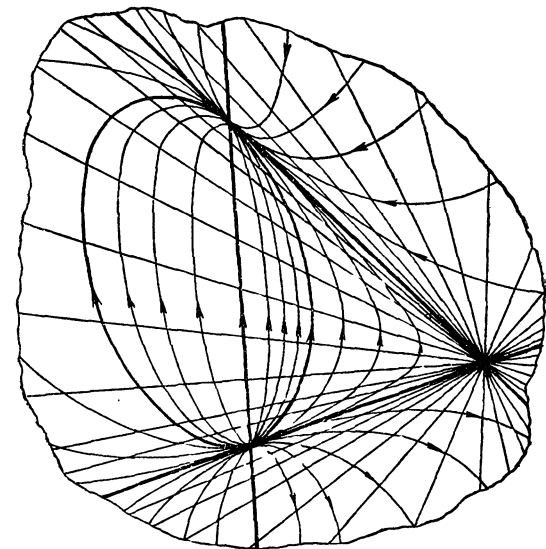
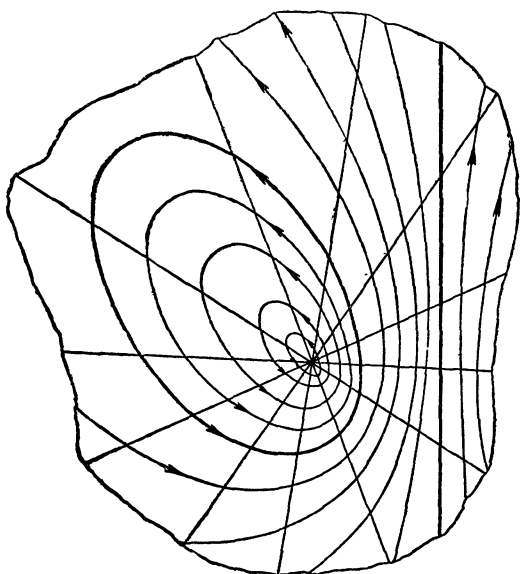
$$\left. \begin{aligned} x' &= x \operatorname{ch} \varphi + z \operatorname{sh} \varphi, \\ y' &= y, \\ z' &= x \operatorname{sh} \varphi + z \operatorname{ch} \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Кубическое уравнение (17) для движения (20) принимает вид

$$(1 - \lambda)(1 - 2\lambda \operatorname{ch} \varphi + \lambda^2) = 0$$

и при $\varphi \neq 0$ имеет три действительных корня: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = \operatorname{ch} \varphi + \operatorname{sh} \varphi = e^\varphi$; $\lambda_3 = \operatorname{ch} \varphi - \operatorname{sh} \varphi = e^{-\varphi}$.

Черт. 56.



Черт. 57.

жений (18) ее можно преобразовать в точку $A(1, 0, 1)$; для этого достаточно взять угол θ , удовлетворяющий соотношениям:

$$\cos \theta = \frac{x}{z}, \quad \sin \theta = -\frac{y}{z}. \quad (21)$$

Им отвечают три неподвижные точки (см. черт. 55): $V(0, 1, 0)$, $A(1, 0, 1)$ и $B(1, 0, -1)$ и три неподвижные прямые: $y=0$, $x-z=0$, $x+z=0$. Точка V есть полюс прямой $y=0$ относительно абсолюта, A и B — точки пересечения абсолюта с прямой $y=0$.

Воспользовавшись формулой (LXIX) (ч. I, стр. 340), легко найдем, что при преобразовании (20) обыкновенные точки прямой $y=0$ сдвигаются все на один и тот же отрезок $\rho = k|\varphi|$, что дает геометрический смысл параметра φ . Этот случай гиперболического движения изображен на черт. 57.

Если точка $M(x, y, z)$ — граничная, то одним из дви-

Действительно, в этом случае для граничной точки, т. е. такой, что $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, имеем:

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x^2 + y^2}{z} = z, \\y' &= \frac{-xy + xy}{z} = 0, \\z' &= z.\end{aligned}$$

Если же точка $M(x, y, z)$ — обыкновенная или идеальная, то при надлежащем выборе угла θ движение (18) преобразует ее в точку $M'(a, 0, c)$, причем $a^2 < c^2$ для обыкновенной точки и $a^2 > c^2$ для идеальной точки.

Выбрав в формулах (20) параметр φ удовлетворяющим соотношению

$$\operatorname{th} \varphi = -\frac{a}{c}$$

в первом случае и соотношению

$$\operatorname{th} \varphi = -\frac{c}{a}$$

— во втором, мы с помощью движения (20) превратим точку M' соответственно в точку $O(0, 0, 1)$ или в точку $U(1, 0, 0)$; добавочное преобразование (18) при $\theta = \frac{\pi}{2}$ преобразует точку U в точку $V(0, 1, 0)$. Учитывая далее, что гиперболическое движение, переводящее точку M в точку M' , превращает полярную точку M относительно абсолюта в полярную точки M' , приходим к таким выводам:

Гиперболическими движениями можно всякую обыкновенную точку плоскости L_2 преобразовать в точку $O(0, 0, 1)$, всякую идеальную точку — в точку $U(1, 0, 0)$ или в точку $V(0, 1, 0)$ и всякую граничную точку — в точку $A(1, 0, 1)$.

С помощью гиперболических движений любая обыкновенная прямая может быть преобразована в прямую $x=0$ или в прямую $y=0$, любая идеальная прямая — в прямую $z=0$, а любая граничная прямая — в прямую $x-z=0$.

5. Движения, оставляющие неподвижной граничную точку $A(1, 0, 1)$. Рассмотрим движение, при котором точка $A(1, 0, 1)$ переходит сама в себя. Тогда второе из уравнений (8) дает

$$0 = \beta_1 \cdot 1 + \beta_2 \cdot 0 + \beta_3 \cdot 1,$$

т. е. $\beta_3 = -\beta_1$; обозначим через σ это общее значение:

$$\beta_1 = -\beta_3 = \sigma.$$

Второе из равенств (15) в этом случае принимает вид

$$\sigma^2 + \beta_2^2 - \sigma^2 = 1$$

и, следовательно,

$$\beta_2^2 = 1.$$

Второе из уравнений (8) можно переписать теперь так:

$$y' = \beta_2 y + \sigma(x - z), \quad \beta_2 = \pm 1. \quad (22)$$

Неподвижность точки A влечет за собой неподвижность и ее полярны по отношению к абсолюту, уравнение которой $x - z = 0$; поэтому

$$x' - z' = \tau(x - z). \quad (23)$$

Равенство (12) вместе с уравнениями (22) и (23) приводит к соотношению

$$\tau(x' + z') = x + z - 2\beta_2 \sigma y - \sigma^2(x - z). \quad (24)$$

Из равенства (24) (или из равенства (23)) сразу усматриваем, что $\tau \neq 0$.

Решая совместно (23) и (24), найдем:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1 - \sigma^2 + \tau^2}{2\tau} x - \frac{\beta_2 \sigma}{\tau} y + \frac{1 + \sigma^2 - \tau^2}{2\tau} z, \\ z' &= \frac{1 - \sigma^2 - \tau^2}{2\tau} x - \frac{\beta_2 \sigma}{\tau} y + \frac{1 + \sigma^2 + \tau^2}{2\tau} z. \end{aligned}$$

Присоединяя к ним еще уравнение (22), мы получим запись того движения, которое оставляет точку A неподвижной. Определитель этого преобразования

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{1 - \sigma^2 + \tau^2}{2\tau} & -\frac{\sigma}{\tau} \beta_2 & \frac{1 + \sigma^2 - \tau^2}{2\tau} \\ \sigma & \beta_2 & -\sigma \\ \frac{1 - \sigma^2 - \tau^2}{2\tau} & -\frac{\sigma}{\tau} \beta_2 & \frac{1 + \sigma^2 + \tau^2}{2\tau} \end{vmatrix},$$

равный β_2 , должен в силу (14) равняться 1; следовательно, $\beta_2 = 1$. Кроме того, из (9) следует, что

$$\frac{1 + \sigma^2 + \tau^2}{2\tau} > 0,$$

т. е.

$$\tau > 0. \quad (25)$$

В итоге всех указанных вычислений мы получим, что любое гиперболическое движение, сохраняющее в покое граничную точку $A(1, 0, 1)$, задается уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{1 + \tau^2 - \sigma^2}{2\tau} x - \frac{\sigma}{\tau} y + \frac{1 - \tau^2 + \sigma^2}{2\tau} z, \\ y' &= \sigma x + y - \sigma z, \\ z' &= \frac{1 - \tau^2 - \sigma^2}{2\tau} x - \frac{\sigma}{\tau} y + \frac{1 + \tau^2 + \sigma^2}{2\tau} z, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где $\tau > 0$. Движение (26) будем обозначать через $S(\sigma, \tau)$.

Уравнение (17) для движения $S(\sigma, \tau)$ принимает вид:

$$\lambda^3 - \left(\frac{1}{\tau} + 1 + \tau\right) \lambda^2 + \left(\frac{1}{\tau} + 1 + \tau\right) \lambda - 1 = 0; \quad (27)$$

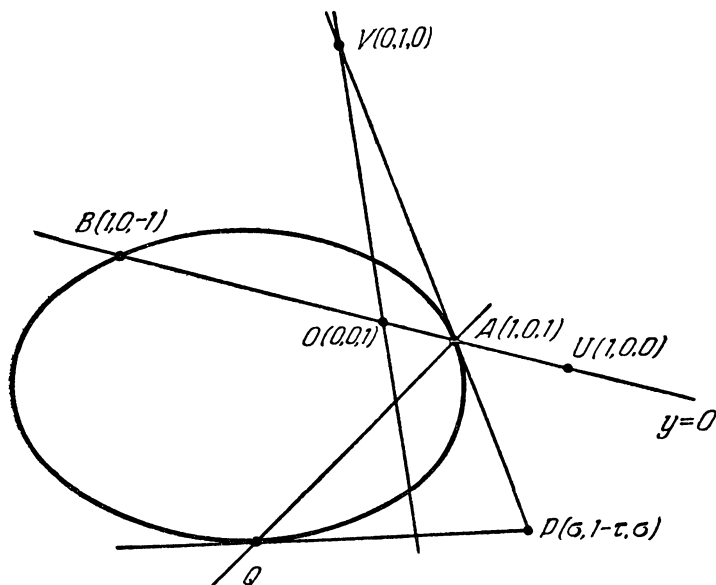
его корни: $\lambda_1 = \frac{1}{\tau}$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = \tau$. При $\tau \neq 1$ эти корни все различны; им отвечают неподвижные точки $A(1, 0, 1)$, $P(\sigma, 1 - \tau, \sigma)$ и

$$Q[\sigma^2 + (1 - \tau)^2, 2\tau\sigma(1 - \tau), \sigma^2 - (1 - \tau)^2]$$

(черт. 58). Полярной точки P относительно абсолюта является прямая AQ , уравнение которой

$$\sigma(x-z) + (1-\tau)y = 0; \quad (28)$$

Q — та точка, в которой прямая (28) пересекается во второй раз с абсолютом. Из всего указанного заключаем (§ 63, рубр. 5), что при $\tau \neq 1$ движение $S(\sigma, \tau)$ есть скольжение вдоль прямой AQ . В частности, движение $S(0, \tau)$, где $\tau \neq 1$, представляет собой скольжение



Черт. 58.

вдоль прямой $y=0$, P совпадает при этом с V , а Q — с B ; и действительно, при $\sigma=0$, $\tau=e^{-\tau}$ уравнения (26) превращаются в уравнения (20).

При $\tau=1$, $\sigma \neq 0$ уравнение (27) имеет тройной корень $\lambda=1$, которому отвечает единственная неподвижная точка A ; мы имеем здесь (§ 66, рубр. 10) орициклическое вращение вокруг точки A ; это движение изображено на черт. 59. Наконец, движение $S(0, 1)$ есть тождественное преобразование.

Отметим еще, что движения $S(\sigma, \tau)$ образуют группу и что преобразование $S(\sigma, \tau)$ ($\sigma \neq 0$, $\tau \neq 1$) есть произведение скольжения вдоль прямой $y=0$ на орициклическое вращение вокруг точки A :

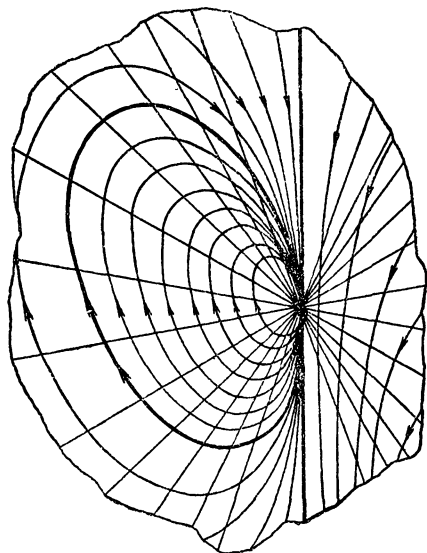
$$S(\sigma, \tau) = S\left(\frac{\sigma}{\tau}, 1\right) \cdot S(0, \tau), \quad \tau > 0. \quad (29)$$

В силу второго из равенств (26) всякая прямая, проходящая через точку A и не совпадающая с прямой $x=z$, некоторым из движений $S(\sigma, \tau)$ может быть преобразована в прямую $y=0$. Если же прямая μ не проходит через точку A , то прежде всего преобразуем в прямую $y=0$ перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую μ , применяя для этой цели надлежащее движение $S(\sigma, \tau)$; тогда прямая μ перейдет

в прямую $\mu'(\alpha, 0, \gamma)$. В случае, когда прямая μ — граничная, необходимо $\alpha = \gamma \neq 0$, и μ' есть прямая $x + z = 0$. Если же прямая μ — обыкновенная или идеальная, то скольжением вдоль прямой $y = 0$ (принадлежащим к числу движений (26)) мы можем превратить прямую μ' или в прямую $x = 0$ (если μ — обыкновенная прямая) или в прямую $z = 0$ (если μ — идеальная прямая) (см. рубр. 4). Таким образом всякая прямая плоскости L_2 , но совпадающая с прямой $x = z$, некоторым из движений $S(\sigma, \tau)$ (см. (26)) может быть преобразована в одну из прямых:

$$y = 0, x = 0, z = 0, x + z = 0; \quad (30)$$

прямая же $x = z$ при любом из движений $S(\sigma, \tau)$ переходит сама в себя.



Черт. 59.

6. Дискриминант уравнения линии второго порядка как инвариант.

Если линию второго порядка (5) подвергнуть гиперболическому движению (8), то она превратится в другую линию; коэффициентами в левой части уравнения этой новой линии будут числа $a', b', \dots, f'$. Несложное вычисление покажет, как коэффициенты $a', \dots, f'$ выражаются через коэффициенты $a, \dots, f$ прежней линии и через числа $\alpha_1, \dots, \gamma_3$, определяющие гиперболическое движение (8); если воспользоваться матричной записью, то все эти выражения можно объединить в одной краткой формуле¹⁾:

$$M' = \begin{vmatrix} a' & b' & d' \\ b' & c' & e' \\ d' & e' & f' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \quad (31)$$

(матрицы перемножаются по обычному правилу: строки на столбцы).

Но определитель произведения матрицы равен, как известно, произведению их определителей. Поэтому, если мы обозначим через Δ' дискриминант уравнения линии, полученной в результате преобразования (8), и учтем равенство (14), то будем иметь:

$$\Delta' = \Delta, \quad (32)$$

т. е. дискриминант Δ уравнения линии второго порядка есть инвариант относительно гиперболических движений.

Следует, однако, иметь в виду, что дискриминант Δ изменится, если умножить обе части уравнения (5) на некоторое (отличное от нуля) число (см. рубр. 2).

¹⁾ Вывод формулы (31) можно найти в книге А. К. Сушкевича, Основы высшей алгебры, М.—Л., Гостехиздат, 1941, § 163.

Дискриминант Δ сохраняет свойство инвариантности (с некоторым ослаблением) и по отношению к любому проективному преобразованию плоскости. Такое преобразование задается также уравнениями (8), но числа $\alpha_1, \dots, \gamma_3$ связаны здесь лишь условием

$$\delta \neq 0 \quad (33)$$

(см. (13) и § 62, рубр. 9, формула (30)). Из равенства (31), которое, очевидно, сохранит силу и в случае любого проективного преобразования, сразу следует:

$$\Delta' = \Delta \cdot \delta^2, \quad (34)$$

т. е., как говорят, дискриминант Δ для проективных преобразований есть относительный инвариант веса 2.

В силу (34) равенство

$$\Delta = 0 \quad (35)$$

сохранится после любого проективного преобразования; оно не нарушится и при умножении обеих частей уравнения линии на какое угодно число. Следовательно, равенство (35) выражает некоторое проективное геометрическое свойство линии второго порядка. Если $\Delta = 0$, то система уравнений

$$\left. \begin{aligned} ax + by + dz &= 0, \\ bx + cy + ez &= 0, \\ dx + ey + fz &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

допускает ненулевые решения; пусть x_0, y_0, z_0 — одно из таких решений. Умножив уравнения (36) соответственно на x, y, z и сложив, получим уравнение (5); вследствие этого точка $Q(x_0, y_0, z_0)$ лежит на линии (5). То, что ее координаты удовлетворяют системе уравнений (36), означает, что полярная точки Q относительно линии (5) не определена (все коэффициенты в уравнении поляры равны нулю); такого рода точка называется особой точкой линии второго порядка. Если ранг r матрицы M (см. (6)) равен 2, то все ненулевые решения системы (36) пропорциональны друг другу, т. е. особая точка Q — единственная, если же $r = 1$, то особые точки заполняют некоторую прямую.

Пусть $Q(x_0, y_0, z_0)$ — особая точка линии второго порядка G , уравнение которой есть (5). Подвергнем плоскость L_2 проективному преобразованию, выбранному так, чтобы точка Q перешла в точку $O(0, 0, 1)$. Тогда особая точка, как ясно из ее определения, перейдет в особую же точку, так что в результате преобразования линия G превратится в линию второго порядка G' , для которой точка O является особой. Уравнения (36) дадут $d' = e' = f' = 0$, вследствие чего уравнение линии G' имеет вид:

$$a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 = 0. \quad (37)$$

Мы видим, что линия G' (а следовательно, и исходная линия G) есть пара прямых.

Обратно, если линия второго порядка — пара прямых, то проективным преобразованием ее можно превратить в линию (37); поэтому дискриминант $\Delta = 0$.

Итак, равенство

$$\Delta = 0$$

необходимо и достаточно для того, чтобы линия второго порядка представляла собой пару прямых.

Линию второго порядка, у которой дискриминант $\Delta = 0$, будем называть вырожденной; если же $\Delta \neq 0$, то линия — невырожденная.

Из равенства (31) можно вывести еще одно следствие. Так как при умножении матрицы на неособенную матрицу ее ранг остается неизменным, то ввиду равенства (31) и соотношения (33) ранг r матрицы M инвариантен относительно всякого проективного преобразования (в том числе и относительно гиперболических движений); он остается неизменным и при умножении обеих частей уравнения линии на число $\xi \neq 0$. Поэтому число r можно назвать рангом линии второго порядка; в дальнейшем (в §§ 68 и 69) мы его всегда будем обозначать буквой r , не оговаривая каждый раз ее смысла.

Если $r = 2$, то в уравнении (37) $a'c' - b'^2 \neq 0$; при $r = 1$ в том же уравнении $a'c' - b'^2 = 0$. Таким образом при $r = 2$ линия второго порядка есть пара различных прямых, при $r = 1$ — пара совпадающих прямых.

7. Характеристический полином и характеристические числа уравнения линии второго порядка. Наряду с линией (5) рассмотрим пучок линий второго порядка:

$$g(x, y, z) - \mu \omega(x, y, z) = 0, \quad (38)$$

($\omega(x, y, z) = 0$ есть уравнение абсолюта) или в подробной записи

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 - \mu(x^2 + y^2 - z^2) = 0,$$

где μ — переменный скаляр, и разыщем в этом пучке все вырожденные линии. Мы придем к уравнению

$$\begin{vmatrix} a - \mu & b & d \\ b & c - \mu & e \\ d & e & f + \mu \end{vmatrix} = 0,$$

или в развернутом виде

$$\mu^3 - S\mu^2 - T\mu + \Delta = 0, \quad (39)$$

где

$$S = a + c - f, \quad T = A + C - F \quad (40)$$

(см. рубр. 2). Левая часть уравнения (39) называется характеристическим полиномом уравнения линии второго порядка (5), а корни этого полинома (т. е. корни уравнения (39)) носят название характеристических чисел уравнения (5).

Если μ_1, μ_2, μ_3 — характеристические числа, то

$$S = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \quad T = -(\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3). \quad (41)$$

В силу (32) и (12) характеристические числа уравнения (5), а по (41) также и выражения S и T (см. (40)) являются инвариантами гиперболических движений.

При умножении обеих частей уравнения линии (5) на число $\xi \neq 0$ характеристические числа и число S умножаются на ξ , а число T — на ξ^2 .

8. Инварианты уравнения вырожденной линии второго порядка. В случае, когда $r \leq 2$, т. е. когда линия второго порядка — вырожденная, ее уравнение по отношению к гиперболическим движениям имеет, кроме указанных в рубр. 6 и 7, еще некоторые инварианты.

При установлении этих инвариантов мы будем исходить из равенств:

$$CF - E^2 = a\Delta; \quad AF - D^2 = c\Delta; \quad AC - B^2 = f\Delta, \quad (42)$$

вытекающих из теории взаимных определителей; они могут быть легко проверены и непосредственно. Если $r \leq 2$, то $\Delta = 0$, и равенства (42) дают:

$$CF = E^2; \quad AF = D^2; \quad AC = B^2. \quad (43)$$

Из соотношений (43) вытекают такие следствия:

а) Если для вырожденной линии второго порядка главные миноры A, C, F дискриминанта ее уравнения равны нулю, то и все остальные миноры также равны нулю: $D = E = B = 0$, так что $r = 1$.

б) При $r = 2$ те из главных миноров A, C, F , которые отличны от нуля, имеют все один и тот же знак.

Нетрудно установить геометрический смысл этого общего знака отличных от нуля главных миноров. При $r = 2$ линия (5) есть пара различных прямых (конец рубр. 6); эти прямые или обе действительные или обе мнимые, причем в последнем случае координаты одной из них сопряжены соответствующим координатам другой, а точка их пересечения (особая точка линии) — действительная. Предположим, что отличен от нуля минор F :

$$F = ac - b^2 \neq 0. \quad (44)$$

Точки пересечения прямой $z = 0$ с линией (5) определяются из уравнения

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0;$$

в силу (44) эти точки будут обязательно различны; при $F > 0$ они — мнимые, при $F < 0$ — действительные. Ясно, что в первом случае и прямые, на которые распадается линия (5), будут мнимыми, а во втором — действительными. Аналогичные рассуждения применимы и к случаю, когда $A \neq 0$ или $C \neq 0$.

Введем в рассмотрение число

$$\varepsilon = \text{sign}(A + C + F); \quad (45)$$

иначе говоря, $\varepsilon = +1$, если $A + C + F > 0$; $\varepsilon = -1$, если $A + C + F < 0$, и $\varepsilon = 0$, если $A + C + F = 0$. Согласно предыдущему

с) При $\Delta = 0$, $\varepsilon = -1$ линия (5) есть пара действительных прямых; при $\Delta = 0$, $\varepsilon = +1$ линия (5) представляет собой пару мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке; если же $\Delta = 0$, $\varepsilon = 0$, то линия (5) — пара совпадающих прямых. В первых двух случаях $r = 2$, в последнем $r = 1$.

д) Число ε (см. (45)) есть инвариант гиперболических движений (и вообще любых проективных преобразований).

В силу инвариантности числа T (рубр. 5) произведение

$$K = \varepsilon T = \varepsilon(A + C - F) \quad (46)$$

также является инвариантом гиперболических движений. При умножении обеих частей уравнения (5) на $\xi \neq 0$ число K умножится на ξ^2 ; следовательно, знак инварианта K должен иметь геометрический смысл; установлением его мы сейчас и займемся.

Предположим, что главный минор $A \neq 0$; координаты x_0, y_0, z_0 особой точки Q определяются из уравнений (36):

$$x_0 : y_0 : z_0 = A : B : D.$$

Отсюда следует ввиду равенств (43):

$$x_0^2 : y_0^2 : z_0^2 = A^2 : B^2 : D^2 = A^2 : AC : AF,$$

или

$$x_0^2 : y_0^2 : z_0^2 = A : C : F;$$

то же будем иметь, если $C \neq 0$ или если $F \neq 0$.

Но по замечанию б) и по (45) $\epsilon A \geq 0$, $\epsilon C \geq 0$, $\epsilon F \geq 0$; поэтому мы получим для координат x_0, y_0, z_0 действительные значения, если положим

$$x_0^2 = \epsilon A; \quad y_0^2 = \epsilon C; \quad z_0^2 = \epsilon F;$$

последние же равенства дадут (см. (46)):

$$x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = K. \quad (47)$$

Таким образом

е) Если $K < 0$, особая точка Q — обыкновенная, если $K = 0$, а $\epsilon \neq 0$, точка Q — граничная, и если $K > 0$ — идеальная.

Если μ_i — одно из действительных характеристических чисел уравнения (5), то вышеизложенные рассуждения применимы к линии:

$$g(x, y, z) - \mu_i \omega(x, y, z) = 0; \quad (48)$$

соответствующие значения ранга и инвариантов ϵ и K мы будем обозначать через r_i, ϵ_i, K_i ; эти три числа — инварианты гиперболических движений. Первые два из них не изменяются при умножении обеих частей уравнения (5) на число, отличное от нуля; последнее же не меняет при этом своего знака.

В случае, когда $\epsilon_i = 0$, линия (48) есть пара совпадающих прямых $\{r_i = 1\}$ или же левая часть (48) тождественно равна нулю $\{r_i = 0\}$. В обоих случаях

$$g(x, y, z) - \mu_i \omega(x, y, z) = \alpha(px + qy + rz)^2. \quad (49)$$

При $\alpha \neq 0$ знак числа α , очевидно, совпадает со знаком тех из коэффициентов $a - \mu_i, c - \mu_i, f + \mu_i$ при x^2, y^2, z^2 в левой части равенства (49), которые отличны от нуля. Исходя из этого, легко убеждаемся, что при $r_i \leq 1$ число

$$\eta_i = \text{sign} \{ \mu_i (a + c + f - \mu_i) \} \quad (50)$$

является инвариантом гиперболических движений (8), не изменяющимся при умножении обеих частей уравнения (5) на любое число $\xi \neq 0$.

Ниже (§ 69) мы убедимся, что значения найденных в рубр. 6, 7, 8 инвариантов вполне определяют класс, к которому принадлежит линия второго порядка.

§ 69. КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

1. Вводные соображения. Классификация линий второго порядка на плоскости L_2 впервые была дана Либманом (H. Liebmann [54]). В нашем изложении этого вопроса мы существенно пользовались сотрудничеством А. В. Яблоновского и В. Г. Ямпольского, которым принадлежат основные результаты параграфа 1).

В первую очередь нам надлежит найти канонические виды уравнений линий второго порядка. Такое название носят те уравнения, в одно из которых с помощью гиперболических движений (§ 68, (8)) может быть преобразовано уравнение

$$g(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

любой линии второго порядка²⁾. Но в силу определения характеристических чисел уравнения (1) (см. § 68, рубр. 7)

$$g(x, y, z) \equiv \mu\omega(x, y, z) + \varphi(x, y, z), \quad (2)$$

где μ — одно из этих чисел, $\omega(x, y, z) = 0$ — уравнение абсолюта, а $\varphi(x, y, z)$ — левая часть уравнения некоторой вырожденной линии второго порядка. Таким образом задача сведена к разысканию канонических видов для уравнений пар прямых, что и будет сделано в рубр. 2. На таком пути мы найдем в рубр. 4—7 все классы линий второго порядка на плоскости L_2 и дадим для каждого класса его инвариантный признак.

2. Канонические виды уравнений пар прямых на расширенной плоскости Лобачевского. Пусть Q — особая точка (или одна из особых точек) вырожденной линии второго порядка $g(x, y, z) = 0$. Здесь могут представиться три возможности.

1°. Особая точка Q — обыкновенная. Подвергнув линию в случае надобности гиперболическому движению, можем считать, что точка Q совпадает с точкой $O(0, 0, 1)$ (§ 68, конец рубр. 4), так что уравнение линии имеет вид (37) § 68. С помощью вращения вокруг точки O (§ 68, (18)) так же, как в евклидовой геометрии, приведем уравнение линии к виду

$$\lambda x^2 + \mu y^2 = 0. \quad (3)$$

Характеристические числа уравнения линии (3) суть $\lambda, \mu, 0$.

2°. Особая точка Q — идеальная. Можно принять (§ 68, конец рубр. 4), что Q совпадает с точкой $V(0, 1, 0)$, так что уравнение линии будет:

$$ax^2 + 2dxz + fz^2 = 0. \quad (4)$$

При $a \neq 0$ линия (4) представляет собой пару прямых

$$x - \psi_1 z = 0, \quad x - \psi_2 z = 0, \quad (5)$$

¹⁾ Они же указали (в несколько отличной форме) и инварианты ϵ и K (§ 68, рубр. 8).

²⁾ В руководствах по аналитической геометрии евклидовой плоскости приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду производится обычно не с помощью движений, а с помощью преобразований координат. Нетрудно понять, что это различие несущественно: так как уравнение линии определяется ее расположением относительно осей координат, то безразлично, будем ли мы, оставляя линию неподвижной, перемещать систему координат или же, наоборот, не изменяя системы координат, будем передвигать линию по плоскости.

где ψ_1, ψ_2 — корни уравнения

$$a\psi^2 + 2d\psi + f = 0. \quad (6)$$

Введем обозначение

$$\Gamma = (a + f)^2 - 4d^2. \quad (7)$$

Если $\Gamma = 0$, то один из корней уравнения (6) $\psi_1 = \pm 1$ и, следовательно, одна из прямых (5), на которые распадается линия (4), есть граничная прямая $x - z = 0$ (при $\psi_1 = -1$ производим еще преобразование (18) § 68 с $\theta = \pi$: $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = z$; как легко видеть, высказанное утверждение справедливо и при $a = 0$). В силу результата, указанного в конце рубр. 5 § 68, уравнение рассматриваемой линии приводится с помощью подходящего преобразования $S(\sigma, \tau)$ к одному из следующих четырех видов (штрихи откинута):

$$p(x - z)^2 = 0, \quad (8)$$

$$\lambda(x^2 - z^2) = 0, \quad (9)$$

$$2\lambda x(x - z) = 0, \quad (10)$$

$$2\lambda z(x - z) = 0 \quad (11)$$

(уравнение $y = 0$ не может здесь получиться, так как тогда точка Q была бы граничной). Характеристические числа уравнений (10) и (11): $\lambda, \lambda, 0$.

Если $\Gamma = (a + f - 2d)(a + f + 2d) < 0$, то при $a = 0$ уравнение линии (4) таково:

$$2z(px - qz) = 0; \quad q^2 - p^2 < 0, \quad (12)$$

где $p = d$, $q = -\frac{1}{2}f$. Уравнение (12) имеет характеристические числа $q \pm i\sqrt{p^2 - q^2}, 0$.

При $a \neq 0$, $\Gamma < 0$ выражения $a - 2d + f$ и $a + 2d + f$ имеют различные знаки, вследствие чего уравнение (6) имеет один корень на интервале $(-1, 1)$, а другой — на одном из интервалов $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$. Поэтому здесь одна из прямых (5) — обыкновенная, а другая — идеальная; гиперболическим движением, оставляющим неподвижной точку V , мы можем превратить (§ 68, рубр. 4) последнюю в прямую $z = 0$, после чего уравнение линии примет вид (12).

Наконец, если $\Gamma > 0$, то

$$\left| \frac{2d}{a+f} \right| < 1. \quad (13)$$

После преобразования (20) § 68 уравнение линии станет:

$$a'x'^2 + 2d'x'z' + f'z'^2 = 0,$$

где

$$2d' = 2d \operatorname{ch} 2\varphi - (a + f) \operatorname{sh} 2\varphi. \quad (14)$$

Ввиду (13) мы можем положить

$$\operatorname{th} 2\varphi = \frac{2d}{a+f},$$

а тогда по (14) $d' = 0$. Преобразованная линия имеет уравнение

$$\lambda x^2 + \mu z^2 = 0 \quad (15)$$

(штрихи откинута) с характеристическими числами $\lambda, -\mu, 0$.

3°. Особая точка Q — граничная; можно считать (§ 68, рубр. 4), что она совпадает с точкой $A(1, 0, 1)$. Уравнение линии имеет вид:

$$a(x-z)^2 + 2b(x-z)y + \lambda y^2 = 0. \quad (16)$$

Если $c \neq 0$, то орициклическое вращение $S\left(\frac{b}{c}, 1\right)$ (см. § 68, рубр. 5, формулы (22) и (23) при $\tau = \beta_2 = 1$, $\sigma = \frac{b}{c}$):

$$x - z = x' - z'; \quad y = y' - \frac{b}{c}(x' - z')$$

превратит (16) в линию

$$p(x-z)^2 + \lambda y^2 = 0 \quad (17)$$

(для простоты штрихи откидываем), уравнение которой имеет характеристические числа $\lambda, 0, 0$.

Если $b = 0$, то (16) совпадает с (17); если же $b \neq 0$, $c = 0$, то движение $S\left(\frac{a}{2b}, 1\right)$ преобразует (16) в линию

$$2b(x-z)y = 0 \quad (18)$$

(снова откидываем штрихи). Уравнение (18) имеет трехкратное характеристическое число, равное нулю.

Учитывая, что уравнения (8) и (9) являются соответственно частными случаями уравнений (17) и (15), приходим к следующему выводу:

С помощью гиперболических движений (§ 68, (8)) любая вырожденная линия второго порядка может быть преобразована в одну из линий (3), (10), (11), (12), (15), (17) и (18).

3. Канонические виды уравнений невырожденных линий второго порядка. Результаты рубр. 2 позволяют нам на основе формулы (2) легко получить канонические виды для уравнений невырожденных линий; при этом следует иметь в виду, что если уравнение (1) имеет характеристические числа μ_1, μ_2, μ_3 ($\mu_1\mu_2\mu_3 \neq 0$), то уравнение вырожденной линии

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad (19)$$

имеет характеристические числа

$$\mu_1 - \mu, \mu_2 - \mu, \mu_3 - \mu, \quad (20)$$

где μ — одно из чисел μ_1, μ_2, μ_3 .

Договоримся в том случае, когда уравнение (1) имеет простое характеристическое число μ_1 и двукратное характеристическое число μ_2 , брать всегда в равенстве (2) $\mu = \mu_1$; тогда для линии (19) канонический вид (17) будет возможен лишь при условии, что $\lambda = 0$. Ввиду равенства (2) мы из уравнений (12), (10), (11), (18) и из уравнения (17) при $\lambda = 0$ получим следующие канонические виды для уравнений невырожденных линий второго порядка (см. также (20)):

$$\mu_1(x^2 + y^2) - (\mu_1 + 2q)z^2 + 2pxz = 0, \quad p^2 - q^2 > 0, \quad (21)$$

$$(2\mu_2 - \mu_1)x^2 + \mu_1(y^2 - z^2) + 2(\mu_1 - \mu_2)xz = 0, \quad (22)$$

$$\mu_1(x^2 + y^2) - (2\mu_2 - \mu_1)z^2 + 2(\mu_2 - \mu_1)xz = 0, \quad (23)$$

$$\mu_1(x^2 + y^2 - z^2) + 2b(x-z)y = 0, \quad b \neq 0, \quad (24)$$

$$\mu_1(x^2 + y^2 - z^2) + p(x-z)^2 = 0, \quad p \neq 0 \quad (25)$$

{уравнения (24) при $b=0$ и (25) при $p=0$ подходят под нижеуказанный канонический вид (27)).

Для уравнения (21) характеристические числа будут

$$\mu_1 + q \pm i \sqrt{p^2 - q^2}, \mu_1. \quad (26)$$

Уравнения (22) и (23) имеют простое характеристическое число μ_1 и двукратное μ_2 , причем для линии (22) $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1$, а для линии (23) $\epsilon_1 = -1$, $\epsilon_2 = 1$ (см. § 68, рубр. 8).

У уравнений (24) и (25) характеристическое число μ_1 — трехкратное; для линии (24) $\epsilon_1 = -1$, а для линии (25) $\epsilon_1 = 0$, $r_1 = 1$, $\eta_1 = \text{sign}(\mu_1 p)$, т. е. $\eta_1 = 1$ при $\mu_1 p > 0$ и $\eta_1 = -1$ при $\mu_1 p < 0$.

Если линия (19) приводима к одному из канонических видов (3) или (15), то по (2) линия (1) может быть преобразована в кривую, уравнение которой

$$\mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 = \mu_3 z^2. \quad (27)$$

Уравнение (27) имеет характеристические числа μ_1, μ_2, μ_3 . В такой форме мы будем его записывать только тогда, когда характеристические числа все различны или все одинаковы. Если же μ_1 — простое характеристическое число, а μ_2 — двукратное, то будем его писать в виде

$$\mu_2 (x^2 + y^2) = \mu_1 z^2 \quad (28)$$

или в виде

$$\mu_2 x^2 + \mu_1 y^2 = \mu_3 z^2. \quad (29)$$

(здесь учтено то обстоятельство, что вращение (18) § 68 при $\theta = \frac{\pi}{2}$ переставляет в левой части (29) буквы x и y).

Отметим, что у обеих линий (28) и (29) инвариант $\epsilon_2 = 0$, а инвариант ϵ_1 для линий (28) и (29) равен соответственно $+1$ и -1 . Для линии (27) при $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ имеем $r_1 = \epsilon_1 = \eta_1 = 0$.

Уравнения (21), (22), (23), (24), (25), (27), (28) и (29) исчерпывают собой все возможные для уравнений невырожденных линий второго порядка канонические виды.

4. Классификация невырожденных линий второго порядка в случае, когда характеристические числа все различны. Если все характеристические числа действительны, то уравнение линии может быть приведено к виду (27), где

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 \neq 0, \quad \mu_1 \neq \mu_2, \mu_1 \neq \mu_3, \mu_2 \neq \mu_3. \quad (30)$$

Из замечания е) в рубр. 8 § 68 вытекает, что $K_1 > 0$, $K_2 > 0$, а $K_3 < 0$; последнее соотношение позволяет отличить характеристическое число μ_3 от двух остальных.

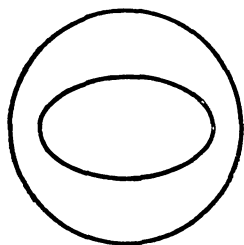
Здесь могут представиться следующие случаи (необходимо иметь в виду замечание к формуле (29)):

1) $\frac{\mu_1}{\mu_3} > 1$; $\frac{\mu_2}{\mu_3} > 1$. Линия вся состоит из обыкновенных точек и называется эллипсом (черт. 60)¹⁾.

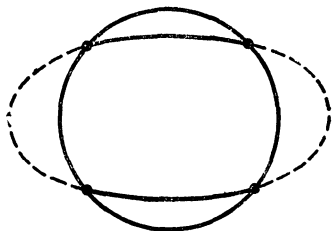
¹⁾ На прилагаемых чертежах линий, заданные каноническими уравнениями, изображены на карте Бельтрами в предположении, что абсолют есть окружность радиуса 1 с центром в точке $O(0, 0, 1)$. Часть кривой, лежащая вне абсолюта, указана пунктиром.

2) $0 < \frac{\mu_1}{\mu_3} < 1 < \frac{\mu_2}{\mu_3}$. Линия имеет вид, изображенный на черт. 61, и называется вогнутой гиперболой.

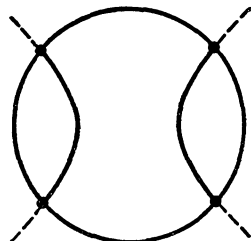
3) $\frac{\mu_2}{\mu_3} < 0 < \frac{\mu_1}{\mu_3} < 1$. Линия носит название выпуклой гиперболы (черт. 62).



Черт. 60.



Черт. 61.

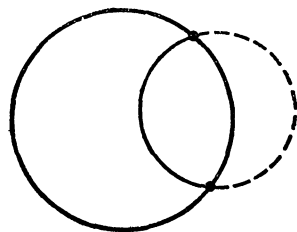


Черт. 62.

Кроме того, уравнение (27) может дать еще два класса линий, не имеющих ни одной обыкновенной точки (таким классам мы будем давать номера, снабженные звездочкой):

1*) $\frac{\mu_1}{\mu_3} < 0, \frac{\mu_2}{\mu_3} < 0$. Линия не имеет действительных точек (мнимый эллипс).

2*) $0 < \frac{\mu_1}{\mu_3} < 1, 0 < \frac{\mu_2}{\mu_3} < 1$, или $\frac{\mu_1}{\mu_3} > 1, \frac{\mu_2}{\mu_3} < 0$. Линия вся состоит из идеальных точек (читатель легко убедится в этом, если сделает ее чертеж на карте Бельтрами); указанную линию назовем идеальным эллипсом.



Черт. 63.

Если среди характеристических чисел одно — действительное, а два остальных — мнимые, то уравнение линии приводится к каноническому виду (21) $\{\mu_1 \neq 0\}$; здесь возможен только один случай:

4) Линия, называемая полугиперболой (черт. 63).

5. Классификация невырожденных линий второго порядка в случае, когда одно характеристическое число — простое, а другое — двукратное. Если $\epsilon_1 = -1, \epsilon_2 = 1$, то каноническим для линии будет уравнение (23). При этом могут представиться две возможности:

5) $\epsilon_1 = -1, \epsilon_2 = 1, \frac{\mu_1}{\mu_2} > 1, \mu_3 = \mu_2$. Эллиптическая парабола (черт. 64).

3*) $\epsilon_1 = -1, \epsilon_2 = 1, \frac{\mu_1}{\mu_2} < 1, \mu_3 = \mu_2$. Линия, не содержащая обыкновенных точек, — идеальная парабола.

При $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1$ каноническим будет уравнение (22); здесь различим три случая:

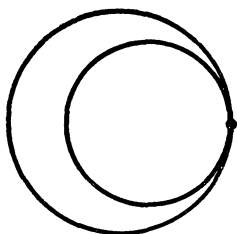
6) $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1, \frac{\mu_1}{\mu_2} > 1, \mu_3 = \mu_2$. Вогнутая гиперболическая парабола о двух ветвях (черт. 65); на чертеже изображена кон-

грузинская каноническая линия

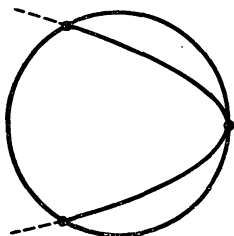
$$(4\mu_2 - \mu_1)x^2 + 3\mu_1y^2 - (\mu_1 + 2\mu_2)z^2 + 2(\mu_1 - \mu_2)xz = 0$$

при $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 1$. Граничная точка $A(1, 0, 1)$ делит обыкновенные точки линии на две ветви.

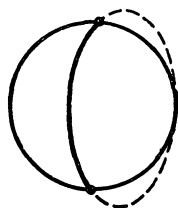
7) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$, $0 < \frac{\mu_1}{\mu_2} < 1$, $\mu_3 = \mu_2$. Вогнутая гиперболическая парабола об одной ветви (черт. 66).



Черт. 64.



Черт. 65.

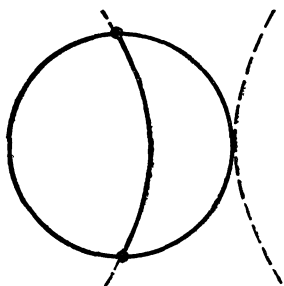


Черт. 66.

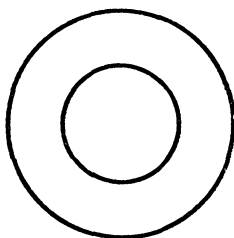
8) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$, $\frac{\mu_1}{\mu_2} < 0$, $\mu_3 = \mu_2$. Выпуклая гиперболическая парабола (черт. 67).

Если $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$, то уравнение линии приводимо к каноническому виду (28); снова — три случая:

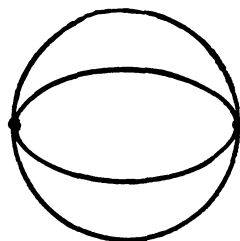
9) $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$, $0 < \frac{\mu_1}{\mu_2} < 1$, $\mu_3 = \mu_2$. Окружность (черт. 68).



Черт. 67.



Черт. 68.



Черт. 69.

4*) $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$, $\frac{\mu_1}{\mu_2} < 0$, $\mu_3 = \mu_2$. Линия не имеет действительных точек — мнимая окружность.

5*) $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$, $\frac{\mu_1}{\mu_2} > 1$, $\mu_3 = \mu_2$. Линия вся состоит из идеальных точек — идеальная окружность.

Наконец, еще два случая получаем при $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = 0$; уравнение приводится к каноническому виду (29).

10) $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = 0$, $\frac{\mu_1}{\mu_2} > 1$, $\mu_3 = \mu_2$. Эквидистанта (черт. 69).

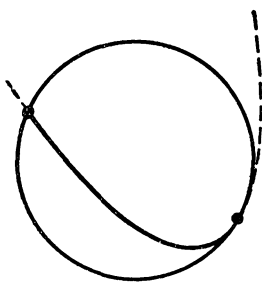
6*) $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = 0$, $\frac{\mu_1}{\mu_2} < 1$, $\mu_3 = \mu_2$. Все точки линии — идеальные или граничные; идеальная эквидистанта.

6. Классификация невырожденных линий второго порядка в случае, когда характеристическое число — трехкратное. В этом случае возможны три канонических вида: (24), (25), а также (27) при $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$. Если имеет место первая из этих трех возможностей, то движением $S\left(0, \frac{b}{\mu_1}\right)$ (см. § 68, рубр. 5, формулы (26)) превратим линию (24) в кривую

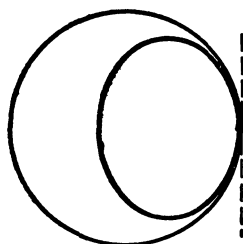
$$\mu_1 \{x^2 + y^2 - z^2 + 2(x - z)y\} = 0; \quad (31)$$

имеем только один класс:

11) $\varepsilon_1 = -1$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$. Линия (31) — соприкасающаяся пара б о л а (черт. 70).



Черт. 70.



Черт. 71.

Линию (25) подвергнем движению $S\left(0, \sqrt{\left|\frac{p}{\mu_1}\right|}\right)$; в результате получим кривую, уравнение которой есть

$$\mu_1 (2x^2 + y^2 - 2xz) = 0 \quad (32)$$

(при $\eta_1 = 1$) или

$$\mu_1 (y^2 - 2z^2 + 2xz) = 0 \quad (33)$$

(при $\eta_1 = -1$). Получаем, таким образом, два случая:

12) $\varepsilon_1 = 0$, $\eta_1 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$. Линия (32) — орицикл (черт. 71).

7*) $\varepsilon_1 = 0$, $\eta_1 = -1$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$. Линия (33), не содержащая обыкновенных точек, — и д е а л ь н ы й о р и ц и к л.

Наконец, уравнение (27) при $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

$$\mu_1 (x^2 + y^2 - z^2) = 0 \quad (34)$$

дает последний случай:

8*) $\varepsilon_1 = \eta_1 = 0$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$. Линия совпадает с абсолютом.

Все классы невырожденных линий второго порядка найдены. Мы видим, что на плоскости L_2 (плоскости Лобачевского в первоначальном смысле слова) имеется двенадцать перечисленных выше (рубр. 4—6) видов невырожденных линий второго порядка.

7. Классификация вырожденных линий второго порядка. Основываясь на канонических видах, данных в рубр. 2, легко установим ниже-следующую классификацию вырожденных линий второго порядка плоскости L_2 . При этом различим такие возможности:

а) Все характеристические числа различны и действительны; $K < 0$, $\mu_3 = 0$. Канонический вид (ср. (3))

$$\mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 = 0. \quad (35)$$

13) $K < 0$, $\mu_1\mu_2 < 0$. Две пересекающиеся обыкновенные прямые (точка пересечения — обыкновенная).

14) $K < 0$, $\mu_1\mu_2 > 0$, $\mu_1 \neq \mu_2$. Две мнимые прямые, не касающиеся абсолюта и пересекающиеся в обыкновенной точке.

b) Все характеристические числа различны и действительны; $K > 0$, $\mu_2 = 0$. Канонический вид (ср. (15))

$$\mu_1 x^2 = \mu_3 z^2. \quad (36)$$

15) $K > 0$, $\mu_1\mu_3 > 0$, $\mu_1^2 > \mu_3^2$. Две расходящиеся обыкновенные прямые.

9*) $K > 0$, $\mu_1\mu_3 > 0$, $\mu_1^2 < \mu_3^2$. Две различные идеальные прямые.

10*) $K > 0$, $\mu_1\mu_3 < 0$. Две мнимые прямые, пересекающиеся в идеальной точке.

c) Все характеристические числа различны, два из них — мнимые. Канонический вид — (12).

16) Две прямые, из которых одна — обыкновенная, а другая — идеальная.

d) Характеристическое число, равное нулю, — простое, другое характеристическое число — двукратное: $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \mu_3 \neq 0$.

17) $\varepsilon = 1$; канонический вид: $\mu_2(x^2 + y^2) = 0$. Две мнимые прямые, касающиеся абсолюта и пересекающиеся в обыкновенной точке.

18) $\varepsilon = \varepsilon_2 = -1$; канонический вид — (10). Две прямые, из которых одна — обыкновенная, а другая — граничная, пересекающиеся в идеальной точке.

11*) $\varepsilon = -1$, $\varepsilon_2 = 1$; канонический вид — (11). Две прямые, из которых одна — граничная, а другая — идеальная.

12*) $\varepsilon = -1$, $\varepsilon_2 = 0$; канонический вид: $\mu_2(x^2 - z^2) = 0$. Две различные граничные прямые.

e) Характеристическое число, равное нулю, — двукратное; $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 = \mu_3 = 0$.

19) $\varepsilon = -1$; канонический вид (ср. (17))

$$\mu_1 y^2 + p(x - z)^2 = 0, \quad (37)$$

где $\mu_1 < 0$. Две параллельные обыкновенные прямые.

20) $\varepsilon = 0$; $\varepsilon_1 = -1$; канонический вид: $\mu_1 x^2 = 0$. Две совпадающие обыкновенные прямые.

13*) $\varepsilon = 1$; канонический вид — (37) при $\mu_1 > 0$. Две мнимые прямые, пересекающиеся в граничной точке.

14*) $\varepsilon = 0$; $\varepsilon_1 = 1$; канонический вид: $\mu_3 z^2 = 0$. Две совпадающие идеальные прямые.

f) Характеристическое число, равное нулю, — трехкратное.

21) $\varepsilon = -1$; канонический вид — (18). Две прямые, из которых одна — обыкновенная, а другая — граничная, пересекающиеся в граничной точке.

15*) $\varepsilon = 0$; канонический вид — (8). Две совпадающие граничные прямые.

Задача классификации линий второго порядка на плоскости L_2 полностью решена.

ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ РАЗВИТИЕ ИДЕЙ КЛЕЙНА

§ 70. МЕМУАР КЭЛИ

1. Задача Кэли. В промежутке от 1854 до 1878 г. английский математик А. Кэли опубликовал десять мемуаров под общим заголовком «On quantics» (A. Cayley^[55]). Под этим названием он разумеет однородные полиномы от нескольких переменных (формы, как принято говорить теперь) с действительными коэффициентами. Предмет исследования заключается в разыскании инвариантов и ковариантов форм при линейных преобразованиях переменных. Установив в первых пяти мемуарах инварианты систем бинарных форм до четвертой степени (порядка) включительно, Кэли посвятил шестой мемуар^[37] геометрическим приложениям. Главная задача, которую он себе при этом ставил, заключалась в том, чтобы на основе построенной им теории инвариантов дать развитие понятия о расстоянии.

Оперируя однородными координатами: на прямой двумя (x, y) , на плоскости тремя (x, y, z) , он задает точку на прямой уравнением, линейным относительно координат

$$ax + by = 0, \quad (1)$$

пару точек — уравнением второй степени

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0. \quad (2)$$

Кэли всегда предполагает, что коэффициенты a, b, c имеют действительные значения или, по крайней мере, действительные значения имеют их отношения (т. е. коэффициенты a, b, c могут иметь общий мнимый множитель). Если не будет оговорено противное, мы будем считать коэффициенты a, b, c действительными; сообразно этому точки, определяемые уравнениями (2), будут действительными различными, если дискриминант $ac - b^2 < 0$, мнимыми сопряженными, если $ac - b^2 > 0$, совпадающими, если $ac - b^2 = 0$.

В первой части мемуара Кэли оперирует, можно сказать, исключительно парами точек. Он пользуется при этом специальным обозначением бинарной формы, которое, однако, слишком сложно и в употребление не вошло: приближаясь к знаменитому Клейна, мы будем обозначать бинарную форму, составляющую левую часть уравнения (2), через $\Omega(x, y)$, т. е. положим

$$\Omega(x, y) \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2. \quad (3)$$

Говорят, что пара точек определяется формулой $\Omega(x, y)$, разумея под этим, что однородные координаты этих двух точек удовлетворяют уравнению $\Omega(x, y) = 0$.

2. Гармонические пары точек. Рассмотрим теперь две пары точек

$$\left. \begin{aligned} \Omega(x, y) &\equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0, \\ \Omega'(x, y) &\equiv a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Первая состоит из точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , вторая — из точек (x'_1, y'_1) и (x'_2, y'_2) . Предполагая в дальнейшем оба дискриминанта не равными нулю: $ac - b^2 \neq 0$, $a'c' - b'^2 \neq 0$, т. е. точки в каждой паре различными, разыщем условие, при котором одна пара делит другую гармонически. Если буквой ξ со знаком (значками) будем обозначать абсциссу соответствующей точки, так что

$$\xi_1 = \frac{x_1}{y_1}, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{y_2}, \quad \xi'_1 = \frac{x'_1}{y'_1}, \quad \xi'_2 = \frac{x'_2}{y'_2}, \quad (5)$$

то ангармоническое отношение, в котором вторая пара точек (M'_1, M'_2) делит первую (M_1, M_2) :

$$\{M_1 M_2; M'_1 M'_2\} = \frac{M_1 M'_1}{M_1 M'_2} : \frac{M_2 M'_1}{M_2 M'_2},$$

имеет значение

$$\frac{\xi'_1 - \xi_1}{\xi'_2 - \xi_1} : \frac{\xi'_1 - \xi_2}{\xi'_2 - \xi_2}.$$

Чтобы деление было гармоническим, это двойное отношение должно быть равно -1 , что выражается равенством

$$2\xi_1 \xi_2 - (\xi_1 + \xi_2)(\xi'_1 + \xi'_2) + 2\xi'_1 \xi'_2 = 0.$$

Принимая же во внимание, что абсциссы (5) ξ_1, ξ_2 и ξ'_1, ξ'_2 удовлетворяют соответственно первому и второму уравнениям (4), написанным в виде

$$\begin{aligned} a\xi^2 + 2b\xi + c &= 0, \\ a'\xi'^2 + 2b'\xi' + c' &= 0, \end{aligned}$$

так что

$$\xi_1 \xi_2 = \frac{c}{a}, \quad \xi_1 + \xi_2 = -\frac{2b}{a}, \quad \xi'_1 \xi'_2 = \frac{c'}{a'}, \quad \xi'_1 + \xi'_2 = -\frac{2b'}{a'}, \quad (6)$$

находим, что предыдущее условие выражается так:

$$ac' + a'c - 2bb' = 0. \quad (7)$$

Легко убедиться, что оно остается в силе и тогда, когда $a=0$ или $a'=0$. Это и есть условие, необходимое и достаточное для того, чтобы две пары точек делили друг друга гармонически; левая часть равенства (7) есть совместный инвариант форм Ω и Ω' .

Условие (7) приводит к важной теореме: каковы бы ни были две различные пары точек (4), состоящие каждая из двух несовпадающих точек, всегда существует третья пара точек x''_1, y''_1 и x''_2, y''_2 , которая делит гармонически как одну, так и другую данную пару.

Действительно, если третья пара определяется формой $\Omega''(x, y) \equiv a''x^2 + 2b''xy + c''y^2$, то для выполнения поставленного требования должны иметь место равенства:

$$ac'' + ca'' - 2bb'' = 0, \quad a'c'' + c'a'' - 2b'b'' = 0;$$

для этого же необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты a'', b'', c'' были бы пропорциональны числам (не обращающимся одновременно в нуль)

$$2(ab' - a'b), ac' - a'c, 2(bc' - b'c),$$

иначе говоря, пара точек

$$\Omega''(x, y) \equiv (ab' - a'b)x^2 + (ac' - a'c)xy + (bc' - b'c)y^2 = 0 \quad (8)$$

и только она удовлетворяет требованию.

Заметим, однако, что условие (7) гармонического деления допускает другое выражение, которым нам придется пользоваться, именно: заменяя в уравнении (7) отношения $\frac{c'}{a'}$ и $\frac{b'}{a'}$ через их значения (6), т. е. полагая

$$\frac{c'}{a'} = \xi'_1 \xi'_2 = \frac{x'_1 x'_2}{y'_1 y'_2}, \quad \frac{b'}{a'} = -\frac{1}{2}(\xi'_1 + \xi'_2) = -\frac{1}{2}\left(\frac{x'_1}{y'_1} + \frac{x'_2}{y'_2}\right),$$

приведем уравнение (7) к виду

$$ax'_1 x'_2 + b'(x'_1 y'_2 + x'_2 y'_1) + cy'_1 y'_2 = 0. \quad (9)$$

Левая часть этого равенства представляет собой не что иное, как значение билинейной формы, соответствующей при «поляризации» квадратичной форме $\Omega(x, y)$, взятое при значениях переменных x'_1, y'_1 и x'_2, y'_2 . Билинейную форму, соответствующую форме $\Omega(x, y)$, будем обозначать через $\Omega(x_1, y_1; x_2, y_2)$, иногда короче через Ω_{12} , т. е. положим

$$\Omega(x_1, y_1; x_2, y_2) \equiv ax_1 x_2 + b(x_1 y_2 + x_2 y_1) + cy_1 y_2. \quad (10)$$

Тогда условие (7) или эквивалентное ему условие (9) можно выразить в форме

$$\Omega(x'_1, y'_1; x'_2, y'_2) = 0. \quad (11)$$

Его можно также представить в виде

$$\Omega'(x_1, y_1; x_2, y_2) = 0, \quad (11')$$

где $\Omega'(x_1, y_1, x_2, y_2)$ — билинейная форма, соответствующая $\Omega'(x, y)$. Мы будем часто писать короче:

$$\Omega_{1'2'} = 0 \quad (12)$$

и

$$\Omega'_{12} = 0. \quad (12a)$$

Смысл этих обозначений совершенно ясен.

3. Две пары точек, разделяющие или не разделяющие друг друга. Положим, что уравнения (4) определяют две пары действительных точек M_1, M_2 и M'_1, M'_2 обыкновенной (евклидовой) прямой, различных в каждой паре. Форма $\Omega(x, y)$ обращается в нуль в каждой из точек M_1, M_2 ; внутри отрезка $M_1 M_2$ она сохраняет знак, а вне его имеет противоположный знак. В какой из этих частей прямой она положительна, зависит от того, как записана форма: знак ее изменится, если изменим знаки коэффициентов формы на обратные; для решения вопроса о том, разделяются ли две точки двумя другими, это значения не имеет. Из сказанного следует, что точки M'_1 и M'_2 разделяют пару M_1, M_2

(т. е. одна из них падает внутрь, а другая вне отрезка M_1M_2), если форма Ω в точках M'_1 и M'_2 имеет различные знаки, и не разделяют их (т. е. обе падают внутрь или же вне отрезка M_1M_2), если форма Ω имеет в точках M'_1 и M'_2 одинаковые знаки.

Переходя к абсциссам $\frac{x'_1}{y'_1}$, $\frac{x'_2}{y'_2}$ этих точек, можем сказать, что точки M'_1 , M'_2 разделяют точки M_1 , M_2 , если произведение

$$\left[a \left(\frac{x'_1}{y'_1} \right)^2 + 2b \left(\frac{x'_1}{y'_1} \right) + c \right] \left[a \left(\frac{x'_2}{y'_2} \right)^2 + 2b \left(\frac{x'_2}{y'_2} \right) + c \right]$$

имеет отрицательное значение, и не разделяют их, если это произведение имеет положительное значение. Но это произведение равно

$$a^2 \left(\frac{x'_1}{y'_1} \right)^2 \left(\frac{x'_2}{y'_2} \right)^2 + 2ab \left(\frac{x'_1}{y'_1} \right) \left(\frac{x'_2}{y'_2} \right) \left(\frac{x'_1}{y'_1} + \frac{x'_2}{y'_2} \right) + ac \left[\left(\frac{x'_1}{y'_1} \right)^2 + \left(\frac{x'_2}{y'_2} \right)^2 \right] + 4b^2 \left(\frac{x'_1}{y'_1} \right) \left(\frac{x'_2}{y'_2} \right) + 2bc \left(\frac{x'_1}{y'_1} + \frac{x'_2}{y'_2} \right) + c^2.$$

А так как в точках M'_1 , M'_2 форма Ω' обращается в нуль, т. е. $\Omega'(x'_1, y'_1) = \Omega'(x'_2, y'_2) = 0$, то

$$\frac{x'_1 x'_2}{y'_1 y'_2} = \frac{c'}{a'}, \quad \frac{x'_1}{y'_1} + \frac{x'_2}{y'_2} = -\frac{2b'}{a'}; \quad \left(\frac{x'_1}{y'_1} \right)^2 + \left(\frac{x'_2}{y'_2} \right)^2 = \frac{4b'^2}{a'^2} - \frac{2c'}{a'}.$$

Предыдущее же выражение, будучи умножено на a'^2 , получает значение

$$(ac' - a'c)^2 - 4(ab' - a'b)(bc' - b'c). \quad (13)$$

Это есть не что иное, как взятый с обратным знаком дискриминант формы Ω'' (см. (8)). Это выражение можно представить также в виде

$$(ac' + a'c - 2bb')^2 - 4(ac - b^2)(a'c' - b'^2). \quad (13')$$

Это значит, что две пары точек $\Omega(x, y)$ и $\Omega'(x', y')$ разделяют друг друга, если выражение (13) или (13') имеет отрицательное значение, и не разделяют друг друга, если оно имеет положительное значение.

Сопоставляя (13) с уравнением (8), видим, что двум парам различных действительных точек соответствует действительная пара точек, делящих их гармонически, в том и только в том случае, если эти пары друг друга не разделяют. Это можно без труда доказать чисто геометрически, но нам понадобится и аналитическое выражение, при-
мыкающее по своему характеру к методу Кэли.

4. Другой путь к установлению пары точек, делящих гармонически каждую из двух других пар точек. Предполагаем попрежнему, что каждая из пар, определяемых уравнениями (4), состоит из двух различных точек, так что $ac - b^2 \neq 0$, $a'c' - b'^2 \neq 0$; это значит, что ни одна из форм Ω и Ω' не представляет собой полного квадрата. В таком случае можно найти два таких числа λ_1 , λ_2 , что форма $\lambda\Omega' - \Omega$ как при $\lambda = \lambda_1$, так и при $\lambda = \lambda_2$ представляет собой полный квадрат. В самом деле,

$$\lambda\Omega' - \Omega \equiv (\lambda a' - a)x^2 + 2(\lambda b' - b)xy + (\lambda c' - c)y^2. \quad (14)$$

Чтобы это выражение было полным квадратом, необходимо и достаточно, чтобы

$$(\lambda a' - a)(\lambda c' - c) - (\lambda b' - b)^2 = 0,$$

т. е. чтобы

$$\lambda^2(a'c' - b'^2) - \lambda(a'c + ac' - 2bb') + (ac - b^2) = 0. \quad (15)$$

Этому уравнению удовлетворяют два значения $\lambda(\lambda_1, \lambda_2)$, оба отличных от нуля (см. (13') и предшествующий текст); подставляя их в равенство (14), получим:

$$\lambda_1 \Omega' - \Omega = (\alpha_1 x + \beta_1 y)^2, \quad \lambda_2 \Omega' - \Omega = (\alpha_2 x + \beta_2 y)^2.$$

Положим теперь

$$\alpha_1 = \sqrt{ac - b^2} v_1, \quad \beta_1 = -\sqrt{ac - b^2} u_1; \quad \alpha_2 = \sqrt{ac - b^2} v_2, \quad \beta_2 = -\sqrt{ac - b^2} u_2$$

с общим значением радикала; предыдущие равенства примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 \Omega' - \Omega &= (ac - b^2) (v_1 x - u_1 y)^2, \\ \lambda_2 \Omega' - \Omega &= (ac - b^2) (v_2 x - u_2 y)^2; \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

вместе с тем

$$(\lambda_1 \Omega' - \Omega)(\lambda_2 \Omega' - \Omega) = (ac - b^2)^2 [(v_1 x - u_1 y)(v_2 x - u_2 y)]^2. \quad (17)$$

Однако левая часть

$$\lambda_1 \lambda_2 \Omega'^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \Omega' \Omega + \Omega^2$$

при значениях λ_1 и λ_2 , удовлетворяющих уравнению (15), принимает вид:

$$\frac{(ac - b^2) \Omega'^2 - (ac' + a'c - 2bb') \Omega' \Omega + (a'c' - b'^2) \Omega^2}{a'c' - b'^2}.$$

Таким образом равенство (17) приводится к виду

$$\begin{aligned} (ac - b^2) \Omega'^2 - (ac' + a'c - 2bb') \Omega' \Omega + (a'c' - b'^2) \Omega^2 = \\ = (ac - b^2)^2 (a'c' - b'^2) [(v_1 x - u_1 y)(v_2 x - u_2 y)]^2. \end{aligned}$$

Однако непосредственными вычислениями нетрудно убедиться, что левая часть этого равенства отличается только множителем -1 от Ω'^2 (см. (8)); это означает, что уравнение

$$(v_1 x - u_1 y)(v_2 x - u_2 y) = 0$$

эквивалентно уравнению (8); точнее, u_1, v_1 и u_2, v_2 суть те две точки, которые разделяют гармонически обе пары точек

$$\Omega(x, y) = 0, \quad \Omega'(x, y) = 0.$$

Так как к форме Ω' можно присоединить произвольный постоянный множитель, отличный от нуля (действительный или мнимый), то мы под Ω' будем понимать прежнее Ω' , умноженное на λ , где λ имеет одно из значений λ_1, λ_2 , к которым мы пришли выше, и тогда равенство (16) можно написать в виде:

$$\Omega' - \Omega = (ac - b^2)(vx - uy)^2. \quad (18)$$

Иными словами, когда задана форма Ω , определяющая две различные точки, то всякую другую форму Ω' можно введением постоянного множителя (действительного или мнимого) привести к такому виду, чтобы она отличалась от Ω полным квадратом линейной формы; это можно выполнить двумя способами, и две

точки, определяемые каждой из соответствующих линейных форм, делят гармонически две пары точек $\Omega=0$ и $\Omega'=0$.

5. Абсолют. Теперь Кэли фиксирует две различные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , которые он определяет уравнением (2): $\Omega(x, y)=0$. Имея в виду сопоставлять с этими двумя точками всякую другую пару точек прямой, Кэли называет фиксированную пару точек $\Omega(x, y)=0$ абсолютом; этот термин появляется таким образом здесь в первый раз. Всякую другую пару точек той же прямой он определяет уравнением $\Omega'(x, y)=0$ таким образом, чтобы тождественно выполнялось равенство (18), т. е. чтобы разность $\Omega' - \Omega$ представляла квадрат линейного двучлена. Так как форму Ω' можно привести к требуемому виду двояким способом, то существуют две точки u_1, v_1 и u_2, v_2 (действительные или мнимые), определяемые уравнением $\Omega''(x, y)=0$, которые делят как абсолют, так и точки $\Omega'(x, y)=0$ гармонически.

В дальнейшем основную роль играет простое, но очень важное соотношение, которое имеет место для бинарных квадратичных форм. Именно, каковы бы ни были две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) и форма $\Omega(x, y)$, всегда при прежних обозначениях имеет место тождество

$$\Omega(x_1, y_1) \Omega(x_2, y_2) - \Omega^2(x_1, y_1; x_2, y_2) = (ac - b^2)(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2. \quad (19)$$

Короче будем писать его в таком виде:

$$\Omega_{11} \Omega_{22} - \Omega_{12}^2 = (ac - b^2)(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2. \quad (19')$$

6. Середина отрезка относительно абсолюта. Две точки P_1, P_2 принимаем за абсолют и одновременно рассматриваем произвольные две другие точки M_1, M_2 ($\Omega'(x, y)=0$); обозначим через (u_1, v_1) и (u_2, v_2) две точки Q_1, Q_2 ($\Omega''(x, y)=0$), которые делят гармонически как абсолют, так и точки M_1, M_2 . В том случае, когда эти точки действительны, Кэли считает, что каждая из точек Q_1, Q_2 (по определению) «относительно абсолюта равноудалена от точек M_1 и M_2 ». Так как проективная прямая замкнута, то точки M_1 и M_2 определяют на ней два отрезка (ср. § 74, рубр. 6); каждую из точек Q_1, Q_2 (если они существуют) можно рассматривать как середину одного из этих отрезков (относительно абсолюта; ср. § 67, рубр. 3).

7. Вычисление координат середины отрезка относительно абсолюта. Пусть $\Omega(x, y)=0$ будет абсолют, $\Omega'(x, y)=0$ — другая пара точек $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$; (u, v) — точка, равноудаленная от них (середина отрезка $M_1 M_2$ по отношению к абсолюту). Вычислим выражение

$$\frac{\Omega^2(x_1, y_1; u, v)}{\Omega(x_1, y_1) \Omega(u, v)}.$$

Мы предположим, что форма $\Omega'(x, y)$ приведена к виду, при котором имеет место равенство (18). Так как $\Omega'(x_1, y_1)=0$, то в силу этого равенства

$$\Omega(x_1, y_1) = (b^2 - ac)(vx_1 - uy_1)^2; \quad (20)$$

с другой стороны, в силу тождества (19) и ввиду (20)

$$\begin{aligned} \Omega^2(x_1, y_1; u, v) &= \Omega(x_1, y_1) \Omega(u, v) + (b^2 - ac)(vx_1 - uy_1)^2 = \\ &= \Omega(x_1, y_1) \Omega(u, v) + \Omega(x_1, y_1) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{\Omega^2(x_1, y_1; u, v)}{\Omega(x_1, y_1) \Omega(u, v)} = 1 + \frac{1}{\Omega(u, v)},$$

но таким же подсчетом обнаружим, что то же значение имеет

$$\frac{\Omega^2(x_2, y_2; u, v)}{\Omega(x_2, y_2) \Omega(u, v)}.$$

Итак, если точка $M_0(u, v)$ равноудалена¹⁾ от M_1 и M_2 , то

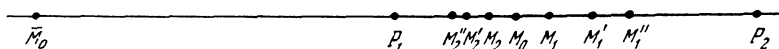
$$\frac{\Omega^2(x_1, y_1; u, v)}{\Omega(x_1, y_1) \Omega(u, v)} = \frac{\Omega^2(x_2, y_2; u, v)}{\Omega(x_2, y_2) \Omega(u, v)}, \quad (21)$$

или если точку (u, v) обозначить через (x_0, y_0) , то это условие в указанных выше обозначениях можно выразить так:

$$\frac{\Omega_{10}}{\sqrt{\Omega_{11}\Omega_{00}}} = \frac{\Omega_{20}}{\sqrt{\Omega_{22}\Omega_{00}}} \quad (21')$$

при надлежащих значениях радикалов.

8. Метрика Кэли в образе первой ступени. Если на нашей прямой заданы две точки M_0 и M_1 (черт. 72), то можно найти такую другую точку M_2 ,



Черт. 72.

чтобы точка M_0 относительно абсолюта P_1P_2 была равноудалена от M_2 и M_1 . Для этого находим точку $\bar{M}_0$, которая вместе с M_0 делит гармонически абсолют, а затем разыскиваем точку M_2 , которая вместе с M_1 делит гармонически пару точек $M_0, \bar{M}_0$; тогда точки $M_0, \bar{M}_0$ делят как абсолют, так и пару точек M_1, M_2 гармонически; эта точка M_2 удовлетворяет требованию. По замыслу и терминологии Кэли «от точки M_0 можно отложить отрезок M_0M_2 , равный M_0M_1 , в другую сторону от M_0 ». Это соответствует расположению точек на чертеже, если точка M_1 лежит между точками P_1 и P_2 , а точка M_0 лежит между P_1 и M_1 . Установив абсолют и выбрав отрезок M_1M_2 в качестве единицы длины, откладываем от точки M_2 отрезок $M_2M'_2$, «равный отрезку M_1M_2 », затем отрезок $M'_2M''_2$, равный $M_2M'_2$, затем отрезок $M''_2M'''_2$, равный $M'_2M'_2$, и т. д. Таким же построением от точки M_1 откладываем отрезок $M_1M'_1$, равный M_2M_1 и т. д. На прямой возникает таким образом шкала «единичных отрезков». Каждый из этих отрезков делим пополам, затем каждый из полученных отрезков вновь делим пополам и т. д.; дробление можно производить сколь угодно далеко. Если теперь возьмем какой-либо отрезок N_1N_2 и в нем окажется p_n долей n -го порядка (т. е. соответствующих делению единицы длины на 2^n частей), то число $p_n/2^n$ мы будем называть n -м приближением длины отрезка N_1N_2 , а предел, к которому это число стремится, когда n неограниченно возрастает, назовем «длиной

¹⁾ Мы не будем постоянно повторять «по отношению к абсолюту».

отрезка N_1N_2 относительно абсолюта». Так как равенство двух отрезков M_1M_0 и M_2M_0 выражается уравнением (21'), то Кэли считает очевидным, что «длина» отрезка N_1N_2 относительно абсолюта должна выражаться функцией $\varphi(J)$, где

$$J = \frac{\Omega_{12}}{\sqrt{\Omega_{11}\Omega_{22}}}.$$

Как должна быть выбрана эта функция? Этот вопрос Кэли обсуждает в специальном разделе своего мемуара, который он называет «теорией расстояний». Он выдвигает два требования, которым функция $\varphi(J)$ должна удовлетворять: 1) расстояние между двумя точками M_1M_2 должно быть равно нулю, когда эти точки совпадают; 2) должна выполняться аддитивность расстояний, она заключается в том, что для трех точек прямой большее из трех расстояний, которые они попарно определяют, должно равняться сумме двух других расстояний.

Если точки M_1 и M_2 совпадают, то J обращается в 1; следовательно, функция φ должна быть выбрана так, чтобы $\varphi(1) = 0$. Кэли останавливается на таком выборе этой функции, чтобы расстояние между двумя точками M_1, M_2 выразилось числом θ , определяемым соотношениями:

$$\cos \theta = J = \frac{\Omega_{12}}{\sqrt{\Omega_{11}\Omega_{22}}}, \quad 0 \leq \theta < \pi. \quad (22)$$

На вопросе о том, есть ли θ действительное число, т. е. есть ли J действительное число, абсолютное значение которого не превышает 1, Кэли не останавливается. На уточнении как этого, так и других рассуждений Кэли, без чего они не убедительны, остановимся подробно в следующем параграфе.

Число θ , определенное соотношением (22), действительно обращается в нуль, когда точки совпадают; но Кэли утверждает, что оно удовлетворяет также требованию аддитивности.

Чтобы это доказать, Кэли устанавливает еще одно простое, но очень важное тождество; именно для любых трех точек M_0, M_1, M_2 имеет место тождество

$$\begin{vmatrix} \Omega_{00} & \Omega_{01} & \Omega_{02} \\ \Omega_{10} & \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{20} & \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{vmatrix} \equiv 0. \quad (23)$$

Действительно, сгруппировав надлежащим образом члены выражений Ω_{ij} , представим этот определитель в таком виде:

$$\begin{vmatrix} x_0(ax_0 + by_0) + y_0(bx_0 + cy_0) & x_1(ax_0 + by_0) + y_1(bx_0 + cy_0) & x_2(ax_0 + by_0) + y_2(bx_0 + cy_0) \\ x_0(ax_1 + by_1) + y_0(bx_1 + cy_1) & x_1(ax_1 + by_1) + y_1(bx_1 + cy_1) & x_2(ax_1 + by_1) + y_2(bx_1 + cy_1) \\ x_0(ax_2 + by_2) + y_0(bx_2 + cy_2) & x_1(ax_2 + by_2) + y_1(bx_2 + cy_2) & x_2(ax_2 + by_2) + y_2(bx_2 + cy_2) \end{vmatrix}.$$

Он разлагается на сумму восьми определителей; если в каждом из них в каждой вертикали вынести за знак определителя общий множитель (x_0 или y_0 , или x_1 и т. д.), то тогда каждый из восьми определителей будет иметь две пропорциональные вертикали, а потому обратится в нуль.

Если в определителе (23) все элементы первой горизонтали разделим на $\sqrt{\Omega_{00}}$, все элементы второй—на $\sqrt{\Omega_{11}}$, третьей—на $\sqrt{\Omega_{22}}$, а затем

все элементы первой вертикали разделим на $\sqrt{\Omega_{00}}$, второй—на $\sqrt{\Omega_{11}}$, третьей—на $\sqrt{\Omega_{22}}$, то при обозначениях (22) равенство примет вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \theta_{01} & \cos \theta_{02} \\ \cos \theta_{10} & 1 & \cos \theta_{12} \\ \cos \theta_{20} & \cos \theta_{21} & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (24)$$

или в раскрытом виде

$$1 - \cos^2 \theta_{01} - \cos^2 \theta_{12} - \cos^2 \theta_{02} + 2 \cos \theta_{01} \cos \theta_{21} \cos \theta_{02} = 0. \quad (24')$$

Если это уравнение разрешим относительно одного из косинусов, например относительно $\cos \theta_{12}$, то получим:

$$\cos \theta_{12} = \cos \theta_{10} \cos \theta_{20} \pm \sin \theta_{10} \sin \theta_{20} = \cos(\theta_{10} \mp \theta_{20}).$$

Из получающихся отсюда зависимостей между расстояниями θ_{ij} Кэли сохраняет три:

$$\begin{aligned} \theta_{12} &= \theta_{10} + \theta_{20}, \\ \theta_{12} &= \theta_{10} - \theta_{20}, \\ \theta_{12} &= -\theta_{10} + \theta_{20}, \end{aligned}$$

которые, кроме неравенств (22), удовлетворяют требованию аддитивности.

9. Построение метрики Кэли. Все изложенные соображения относятся к точечному множеству, точнее, к множеству точек прямой. Кэли отмечает, что те же соображения и выводы находят себе применение к пучку прямых на плоскости, а также к пучку плоскостей, т. е. к совокупности плоскостей, пересекающихся по одной прямой, вообще—к так называемым образам первой ступени. Однако Кэли не указывает точно тех модификаций, с которыми это распространение его идей может быть сопряжено. Далее Кэли распространяет те же идеи на множества второй ступени: на совокупность точек плоскости и на совокупность прямых плоскости. С этой целью он вводит в качестве абсолюта двумерного мероопределения коническое сечение. Прямая пересекает коническое сечение в двух точках, которые образуют абсолют для измерения расстояний на этой прямой. Он указывает при этом, как согласовать единицы длины на различных прямых. Точно так же из точки можно провести к коническому сечению, служащему абсолютом, две касательные. Они служат абсолютом для мероопределения (для измерения углов) в пучке прямых, выходящих из этой точки.

Кэли предусматривает также случай, когда две точки пересечения прямой с абсолютом совпадают или две касательные (абсолют углового мероопределения) сливаются в одну.

Подводя итоги, нужно сказать, что Кэли показал возможность обобщения понятия о расстоянии между точками и об угле между пересекающимися прямыми. Не может подлежать никакому сомнению, что все построения Клейна, по существу, уже содержатся в этой замечательной работе Кэли. Но не подлежит также сомнению, что выводы Кэли далеко не достаточно уточнены; главный дефект заключается в том, что не разобраны случаи, когда основное соотношение (22) дает для расстояния дей-

ствительное или мнимое значение, а также когда по этой схеме действительное или мнимое значение получает угол между пересекающимися прямыми. Между тем этот вопрос имеет основное значение, и его анализ приводит к различным системам геометрии.

Сообразно этому мы в следующем параграфе дадим обстоятельный анализ работы Кэли, а затем в §§ 77 и 78 изложим исследования Клейна, которые содержат классификацию геометрических систем, построенных по схеме Кэли.

§ 71. АНАЛИЗ РАБОТЫ КЭЛИ И РАЗВИТИЕ ЕГО ИДЕЙ

1. Эллиптическое мероопределение на прямой. Как мы указали, Кэли совершенно не останавливается на том, действительны ли образы, которыми он оперирует, а также те числа, к которым он приходит. Исследование носит аналитический характер; между тем с геометрической точки зрения поставленный здесь вопрос имеет весьма существенное значение.

Анализ, выясняющий эти вопросы, привел к уточнению результатов Кэли. Сообразно этому мы проследим его рассуждения в их последовательном порядке и рассмотрим различные частные случаи, которые здесь могут представиться.

В первой части своей работы Кэли фактически строит своеобразную метрическую геометрию, для которой прямая служит субстратом. Он имеет для того, что мы называем субстратом геометрии, особое название «*locus in quo*»—место, в котором геометрия строится.

Метрика Кэли на прямой (евклидовой, с добавлением бесконечно удаленной точки) основана прежде всего на выборе абсолюта, т. е. двух фиксированных точек, которые в однородных координатах определяются уравнением

$$\Omega(x, y) \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0. \quad (1)$$

Константы a, b, c , как уже указано выше, мы всегда считаем действительными (если не указано противное), так что эти две точки могут быть либо действительными, либо мнимыми сопряженными; отдельно, впрочем, разбирается и случай, когда эти точки совпадают. В коэффициенты a, b, c может быть введен действительный множитель, в частности, знаки всех коэффициентов формы могут быть изменены на обратные. Мы имели уже случай видеть, что в эти коэффициенты иногда целесообразно ввести мнимый множитель (рубр. 4 § 70); повторяем, такого рода случаи будут специально оговорены.

Мы начнем с того случая, когда абсолют состоит из двух мнимых точек, т. е. когда $ac - b^2 > 0$, и в этом предположении проследим ход рассуждений Кэли.

Две действительные различные точки прямой определяются уравнением $\Omega'(x, y) = 0$ при $a'c' - b'^2 < 0$. Уравнение (8) § 70 определяет пару точек, делящих гармонически как абсолют $\Omega(x, y) = 0$, так и точки $\Omega'(x, y) = 0$; мы его здесь вновь воспроизводим:

$$(ab' - a'b)x^2 + (ac' - a'c)xy + (bc' - b'c)y^2 = 0. \quad (2)$$

В рассматриваемом случае оно также дает две действительные точки: в самом деле, его дискриминант

$$4(ab' - a'b)(bc' - b'c) - (ac' - a'c)^2, \quad (3)$$

как мы уже отмечали выше (§ 70, (13) и (13')), может быть представлен также в виде:

$$4(ac - b^2)(a'c' - b'^2) - (ac' + ca' - 2bb')^2 \quad (3')$$

и имеет в рассматриваемом случае ($ac - b^2 > 0$, $a'c' - b'^2 < 0$) отрицательное значение. Для любых двух действительных точек можно указать, таким образом, две действительные «равноудаленные от них» точки.

С другой стороны, функция $\Omega(x, y)$ сохраняет в этом случае знак на всем протяжении прямой. Пусть (x'_1, y'_1) , (x'_2, y'_2) — две действительные точки прямой, заданные уравнением $\Omega'(x, y) = 0$. Если применительно к ним напишем тождество (19) предыдущего параграфа:

$$\Omega(x'_1, y'_1) \Omega(x'_2, y'_2) - \Omega^2(x'_1, y'_1; x'_2, y'_2) = (ac - b^2)(x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1)^2, \quad (4)$$

то правая его часть больше нуля.

Поэтому абсолютная величина числа

$$J = \frac{\Omega(x'_1, y'_1; x'_2, y'_2)}{\pm \sqrt{\Omega(x'_1, y'_1) \Omega(x'_2, y'_2)}} \quad (5)$$

меньше 1, и, значит, расстояние θ между этими двумя точками, определяемое по Кэли (§ 70, (22)) соотношением

$$\cos \theta = J, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (6)$$

есть действительное неотрицательное число.

Но оно определено двузачно вследствие двойного знака в выражении (5): если θ есть одно его значение, то другое значение есть $\theta' = \pi - \theta$.

Итак, условием (6) Кэли устанавливает своеобразную метрическую геометрию, субстратом которой служит совокупность точек расширенной евклидовой прямой; «расстояние» между двумя точками в этой метрике всегда определено двузачно, но как одно, так и другое его значение не превышает π . В настоящее время такую метрику называют эллиптической, говорят, что таким путем установлена эллиптическая геометрия прямой; часто самую прямую при этом называют эллиптической. Два обстоятельства характерны для этой геометрии: во-первых, расстояние между двумя точками эллиптической прямой всегда имеет значение, не превышающее числа π ; часто говорят «эллиптическая прямая имеет конечную длину»; во-вторых, расстояние между двумя точками в ней определено двузачно. Последнее обстоятельство приводит к своеобразной особенности эллиптической геометрии прямой. Именно, каковы бы ни были три точки эллиптической прямой, ни об одной из них нельзя сказать, что она лежит «между» двумя другими.

В самом деле, по концепции Кэли точка M_3 лежит на прямой «между» точками M_1 и M_2 , если $M_1 M_2$ есть наибольшее из трех расстояний, попарно определяемых этими тремя точками, и в этом случае $M_1 M_2 = M_1 M_3 + M_3 M_2$. Положим теперь, что при определенном выборе этих расстояний $M_1 M_2 = \alpha$, $M_2 M_3 = \beta$, $M_1 M_3 = \gamma$ и, следовательно, имеет место равенство $\alpha = \beta + \gamma$; но если за расстояние $M_1 M_3$ примем $\gamma' = \pi - \gamma$ и за расстояние $M_1 M_2$ примем $\alpha' = \pi - \alpha$, то предыдущее равенство приведет к тому, что $\gamma' = \alpha' + \beta$, т. е. γ' есть наибольшее из трех расстояний, точка M_2 лежит между точками M_1 и M_3 . Можно выбрать

расстояния и так, чтобы нужно было считать точку M_1 лежащей между M_2 и M_3 .

Однако термин «две точки прямой разделяют или не разделяют другую пару точек» сохраняет смысл и на эллиптической прямой; именно, в соответствии с соображениями, изложенными в рубр. 3 предыдущего параграфа, пара точек $\Omega(x, y) = 0$ не разделяет точек $\Omega'(x, y) = 0$, если числа $\Omega(x'_1, y'_1)$ и $\Omega(x'_2, y'_2)$ имеют одинаковые знаки (или, что то же, одинаковые знаки имеют числа $\Omega'(x_1, y_1)$ и $\Omega'(x_2, y_2)$); и наоборот, эти точки друг друга разделяют, если соответственные числа имеют различные знаки. Заметим, что из соотношений (6) в силу тождества (4) вытекает

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{ac - b^2} |x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1|}{\sqrt{\Omega'_{11} \Omega'_{22}}}. \quad (7)$$

Если точки (x'_1, y'_1) и (x'_2, y'_2) совпадают, то $\theta = 0$ или π . Любопытен другой случай, когда $\Omega_{12} = 0$ (здесь и в дальнейшем штрихи, отмечающие пару точек, отличную то абсолюта, опущены всюду, где это не может вызвать недоразумений), т. е. когда две точки делят абсолют гармонически (§ 70, рубр. 2). Из формулы (6) следует, что в этом случае оба расстояния совпадают и равны $\frac{\pi}{2}$; такие точки называются взаимно полярными точками эллиптической прямой.

В § 74 мы вернемся к геометрии эллиптической прямой, подойдя к ней с новой точки зрения.

2. Гиперболическое мероопределение на прямой. Обращаемся теперь к тому случаю, когда абсолют состоит из двух различных действительных точек P_1, P_2 , так что $ac - b^2 < 0$. Как показано в § 70, рубр. 3, если две точки M_1, M_2 лежат на прямой, обе между точками P_1, P_2 или обе вне этого отрезка, то соответствующее произведение $\Omega_{11} \Omega_{22}$ положительно; если же одна из этих точек лежит внутри отрезка $P_1 P_2$, другая вне его, то это произведение отрицательно; в последнем случае знаменатель в формуле (5) имеет мнимое значение. Сообразно этому прямая делится на две области: одна внутри отрезка $P_1 P_2$, другая вне его; в каждой из них метрика устанавливается отдельно. Принимая за субстрат геометрии (locus in quo) внутреннюю область (отрезок $P_1 P_2$), мы должны считать, что произведение $\Omega_{11} \Omega_{22}$ для любых двух точек области имеет положительное значение. Тождество (4) обнаруживает, что в этом случае

$$J^2 = \frac{\Omega_{12}^2}{\Omega_{11} \Omega_{22}} > 1,$$

аргумент θ , определяемый уравнением (6), имеет мнимое значение. Из того же тождества (4) видим, что в рассматриваемом случае (т. е. при $ac - b^2 < 0$) в нашей области ($P_1 P_2$) J для двух различных точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) не может обратиться в нуль. Заметим еще, что знак числа J меняется на обратный, если изменить на обратные знаки координат одной из точек (что всегда дозволено); если, однако, будем считать y_1 и y_2 всегда положительными, то знак числа J будет зафиксирован; поскольку J в нуль на рассматриваемом интервале не обращается, знак его сохраняется для любых двух точек интервала. Изменив, если нужно, знаки коэффициентов a, b, c формы $\Omega(x, y)$, мы всегда можем считать J положительным.

Уравнение (6) можем написать в виде:

$$\frac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2} = J \quad \text{или} \quad e^{2\theta i} - 2J e^{\theta i} + 1 = 0. \quad (8)$$

Оно имеет (при наших соглашениях) относительно неизвестного $e^{\theta i}$ действительные и притом положительные корни

$$e^{\theta i} = J \pm \sqrt{J^2 - 1}, \quad e^{-\theta i} = J \mp \sqrt{J^2 - 1}, \quad e^{2\theta i} = \frac{J \pm \sqrt{J^2 - 1}}{J \mp \sqrt{J^2 - 1}} \quad (9)$$

и при верхних знаках

$$e^{2\theta i} = \frac{J + \sqrt{J^2 - 1}}{J - \sqrt{J^2 - 1}} > 1.$$

Следовательно, θi есть действительное положительное число, которое и принимаем за расстояние между соответствующими точками. Обозначив его через ρ , имеем:

$$\rho = \frac{1}{2} \ln \frac{J + \sqrt{J^2 - 1}}{J - \sqrt{J^2 - 1}} = \frac{1}{2} \ln \frac{Q_{12} + \sqrt{Q_{12}^2 - Q_{11}Q_{22}}}{Q_{12} - \sqrt{Q_{12}^2 - Q_{11}Q_{22}}} \quad (10)$$

или иначе

$$\rho = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \tau^2}}{1 - \sqrt{1 - \tau^2}}, \quad \text{где} \quad \tau^2 = \frac{Q_{11}Q_{22}}{Q_{12}^2} = \frac{1}{J^2} < 1, \quad (11)$$

причем можно считать $\tau > 0$. Заметим, что из формулы (11) следует

$$e^{2\rho} = \frac{1 + \sqrt{1 - \tau^2}}{1 - \sqrt{1 - \tau^2}}, \quad \frac{e^\rho + e^{-\rho}}{e^\rho - e^{-\rho}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tau^2}},$$

т. е. (сравните (8))

$$\operatorname{ch} \rho = \frac{1}{\tau} = J. \quad (6')$$

Любым двум точкам, для которых $J = \frac{1}{2} (e^{+1} + e^{-1}) = \operatorname{ch} 1$, соответствует расстояние, равное единице длины. Можно, конечно, выбрать единицу длины таким образом, чтобы то же расстояние выражалось числом k ; тогда формулу (11) следует заменить более общей:

$$\rho = \frac{k}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \tau^2}}{1 - \sqrt{1 - \tau^2}}. \quad (11')$$

Выражение (11') совпадает с формулой (LIII) (ч. I, стр. 332), имеющей место в гиперболической геометрии. Сообразно этому, мероопределение, вытекающее из соображений Кэли при действительном абсолюте, называют в настоящее время (Клейн) гиперболическим, а прямую, несущую это мероопределение, — гиперболической прямой.

Сопоставляя формулы (6) и (6'), видим, что гиперболическое мероопределение отличается от эллиптического тем, что в выражении расстояния тригонометрический косинус заменяется гиперболическим. Это имеет последствия двоякого рода: во-первых, расстояние между двумя точками в гиперболическом мероопределении может изменяться от 0 до ∞ , во-вторых, в формуле (6') J должно иметь положительное значение; двузначность, обусловливаемая двойным знаком в формуле (5), отпадает.

На тех же основаниях и также по формуле (10) строится мероопределение в той части прямой P_1P_2 , которая лежит вне отрезка P_1P_2 ; заметим при этом, что бесконечно удаленная точка Q , присоединенная к евклидовой прямой при этом мероопределении, имеет конечное расстояние от любой точки области, внешней по отношению к абсолюту, и на гиперболической прямой не является бесконечно удаленной; возможен и непрерывный переход от любой точки луча P_1Q к любой точке луча P_2Q через точку Q .

Можно сказать, что действительный абсолют делит прямую на две части, в каждой из которых может быть построено гиперболическое мероопределение.

3. Параболическое мероопределение. Случая действительного абсолюта, при котором формула (6) не дает действительного значения θ , Кэли вовсе не рассматривает. Повидимому, это обусловливается тем, что гиперболическая геометрия была ему еще совершенно чужда. Но он отдельно останавливается на том случае, когда две точки, образующие абсолют, совпадают, т. е. когда $ac - b^2 = 0$. Из соотношения (6), как мы видели, при неотрицательном значении дискриминанта $ac - b^2$ вытекает равенство (7). Но при $ac - b^2 = 0$ это дает для любых двух точек $\theta = 0$ или $\theta = \pi$. Как мы увидим ниже (§ 78, рубр. 6—7), бывают случаи, когда это соглашение целесообразно принять; прямую с этим мероопределением в настоящее время принято называть изотропной. Но Кэли поступает иначе. Пользуясь тем, что при $ac - b^2 \neq 0$ в правую часть формулы расстояния (см. (7); штрихи опускаем)

$$\theta = \arcsin \frac{\sqrt{ac - b^2} |x_1y_2 - x_2y_1|}{\sqrt{\Omega_{11}\Omega_{22}}}$$

может быть введен любой постоянный множитель (аддитивное свойство расстояний на прямой при этом сохраняется), Кэли полагает по определению

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{ac - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{ac - b^2} |x_1y_2 - x_2y_1|}{\sqrt{\Omega_{11}\Omega_{22}}}.$$

Если теперь будем неограниченно сближать точки абсолюта, то $ac - b^2$ будет стремиться к нулю, а правая часть последнего равенства — к пределу ρ :

$$\rho = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{\sqrt{\Omega_{11}\Omega_{22}}}, \quad (12)$$

который естественно принять за расстояние (с точностью до постоянного множителя) между двумя точками в параболическом случае при такой разметке точек, для которой числитель имеет положительное значение. Форма $\Omega(x, y)$ в этом случае представляет собой полный квадрат, который обозначим через $(px - qy)^2$; (p, q) суть координаты той точки, с которой совпадают обе точки абсолюта. Вместе с тем формула (12) принимает вид:

$$\rho = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{(px_1 - qy_1)(px_2 - qy_2)}. \quad (12')$$

Кэли вводит в это выражение добавочный постоянный множитель $qa - p\beta \neq 0$, так что

$$\rho = \frac{(qa - p\beta)(x_1y_2 - x_2y_1)}{(px_1 - qy_1)(px_2 - qy_2)} = \frac{ax_2 - \beta y_2}{px_2 - qy_2} - \frac{ax_1 - \beta y_1}{px_1 - qy_1}. \quad (13)$$

Это выражение расстояния между двумя точками при надлежащей разметке букв дает положительное число; оно переходит в евклидово выражение расстояния между двумя точками, если положить в однородных координатах $\alpha x - \beta y = x'$, $px - qy = y'$; расстояние выразится разностью (штрихи теперь опускаем)

$$\frac{x_2}{y_2} - \frac{x_1}{y_1}. \quad (13')$$

В неоднородных координатах, если положить

$$\frac{\alpha x - \beta y}{px - qy} = x, \quad (13'')$$

то расстояние выразится разностью $x_2 - x_1$. Это мероопределение в настоящее время называют параболическим.

4. Проективное мероопределение. Общий вывод из предыдущих рассуждений заключается в том, что на прямой возможно тройкое мероопределение: эллиптическое, гиперболическое или параболическое; в этом смысле говорят об эллиптической, гиперболической или параболической прямой. На гиперболической или параболической прямой расстояние между двумя точками определено однозначно и может быть сколь угодно велико («прямая имеет бесконечное протяжение»); на эллиптической прямой расстояние определено двузначно и в надлежащих единицах во всяком случае не превышает π («прямая конечна»).

Тройкое мероопределение на прямой (тройкая геометрия прямой), вытекающее из замысла Кэли, обуславливается тем, что вещественным линейным преобразованием бинарная квадратичная форма приводится к одному из трех канонических видов: $x^2 + y^2$ (мнимый абсолют и эллиптическая геометрия), $x^2 - y^2$ (действительный абсолют и гиперболическая геометрия) и x^2 (абсолют, состоящий из двух совпадающих точек).

Все исследование Кэли, как сказано выше, имеет основной целью разыскание тех геометрических величин и соотношений, которые остаются инвариантными при линейных однородных преобразованиях переменных. Так как этими переменными в изложенных рассуждениях служат однородные координаты точек прямой, то линейные их преобразования выражают проективные преобразования прямой. Однако метрика — расстояния точек — зависит от выбора абсолюта; поэтому, чтобы она оставалась инвариантной, нужно ограничиться теми линейными преобразованиями, которые оставляют абсолют инвариантным. Проективное преобразование на прямой определяется соответствием трех пар точек. Поэтому, если ограничиться теми преобразованиями, которые оставляют абсолют инвариантным, т. е. относят каждую из точек абсолюта самой себе или замещают их одну другой, то эти преобразования, очевидно, составляют одночленную группу и играют в соответствующей геометрии роль движений. Расстояния, определенные формулой (6) и ее модификациями, остаются при этих преобразованиях инвариантными, так как форма $\Omega(x, y)$ остается неизменной (или приобретает постоянный множитель). Эти расстояния как в эллиптической, так и в гиперболической метрике выражаются через ангармоническое отношение, которое две данные точки образуют с абсолютом. Эллиптическую и гиперболическую метрику, основанную на замысле Кэли, часто называют (Клейн) проективной; не без оговорок это название можно отнести и к параболической метрике.

5. Метроопределение в пучке прямых (метроопределение углов). Те же три вида метроопределений могут быть введены в других образах первой ступени: в пучке прямых на плоскости или плоскостей в пространстве, при определении численных значений линейных или двугранных углов.

Рассмотрим пучок сходящихся прямых в евклидовой плоскости. Каждая прямая (не луч, а именно прямая) может быть задана однородными координатами λ, μ , определенными, следовательно, до общего множителя. Если принять центр пучка за начало ортогональных декартовых координат, то за λ, μ могут быть взяты координаты точки пересечения прямой с окружностью любого радиуса r , имеющей центр в начале координат; иначе говоря, можно положить

$$\lambda = r \cos \varphi, \quad \mu = r \sin \varphi,$$

где φ есть угол (один из двух углов), который прямая образует с положительным направлением оси абсцисс; угол φ можно взять в первой полуокружности.

Две прямые пучка могут быть определены уравнением $\Omega(\lambda, \mu) = 0$, где Ω есть квадратичная форма с действительными коэффициентами. Две фиксированные прямые пучка, определяемые уравнением

$$a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2 = 0, \quad (14)$$

принимая за абсолют; он может состоять из двух действительных прямых, из мнимых сопряженных или совпадающих прямых.

И здесь начнем со случая, когда абсолют состоит из мнимых сопряженных прямых. Угол θ между прямыми устанавливается уравнением (6); он определен двузначно (θ и $\pi - \theta$) — это соответствует двум смежным углам, которые две прямые образуют при своем пересечении; по своему значению он не превышает π . Это — эллиптическое метроопределение угла. Если будем оперировать каноническими формами, то в случае мнимого абсолют исходная форма имеет вид $\lambda^2 + \mu^2$; формулы (5) — (6) дают

$$\cos \theta = \pm \frac{\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2}{\sqrt{(\lambda_1^2 + \mu_1^2)(\lambda_2^2 + \mu_2^2)}}. \quad (15)$$

Вместе с тем, если, как указано выше, положить

$$\lambda_1 = r \cos \varphi_1, \quad \mu_1 = r \sin \varphi_1, \quad \lambda_2 = r \cos \varphi_2, \quad \mu_2 = r \sin \varphi_2, \quad (16)$$

то получим для угла θ

$$\pm \cos \theta = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \cos(\varphi_2 - \varphi_1); \quad (17)$$

можно положить $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$ (первое его значение). Это совпадает с определением численного значения угла в евклидовой плоскости. Иначе говоря, углы измеряются в евклидовой плоскости эллиптически.

Обращаемся теперь к гиперболическому метроопределению углов. В этом случае прямую целесообразно определить ее пересечением с равносторонней гиперболой $x^2 - y^2 = r^2$ или сопряженной гиперболой $y^2 - x^2 = r^2$. Иначе говоря, прямые пучка можно разбить на две категории, которые отделяются одна от другой общими асимптотами этих сопряженных гипербол. В каждом из этих двух пучков метроопределение устанавливается отдельно. Начнем с прямых, встречающих гиперболу $x^2 - y^2 = r^2$. Определяя прямую координатами $\lambda = x, \mu = y$

точки ее пересечения с этой гиперболой, полагаем

$$\lambda_1 = x_1 = r \operatorname{ch} \varphi_1, \quad \mu_1 = y_1 = r \operatorname{sh} \varphi_1, \quad \lambda_2 = r \operatorname{ch} \varphi_2, \quad \mu_2 = r \operatorname{sh} \varphi_2. \quad (18)$$

За абсолют принимаем совокупность асимптот, на которых $\lambda^2 - \mu^2 = x^2 - y^2 = 0$, так что основная форма имеет вид $\lambda^2 - \mu^2$. Так как эта форма неопределенная, то угол θ между прямыми определяется формулой (см. (6') и (5)).

$$\operatorname{ch} \theta = \frac{\lambda_1 \lambda_2 - \mu_1 \mu_2}{\sqrt{(\lambda_1^2 - \mu_1^2)(\lambda_2^2 - \mu_2^2)}}. \quad (19)$$

В рассматриваемой области $\lambda_1^2 > \mu_1^2$, $\lambda_2^2 > \mu_2^2$. Координаты прямых могут быть выбраны так, чтобы выражение для $\operatorname{ch} \theta$ имело положительное значение. Численное значение угла между двумя прямыми определено однозначно и изменяется от 0 до ∞ .

Нетрудно видеть, что аналогичное мероопределение можно установить в пучке прямых, проходящих в двух других вертикальных углах между асимптотами.

Сохраняя обозначения (18), можно положить

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \theta &= \operatorname{ch} \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_2 - \operatorname{sh} \varphi_1 \operatorname{sh} \varphi_2 = \operatorname{ch}(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \theta &= \varphi_2 - \varphi_1 \quad (\varphi_2 > \varphi_1), \end{aligned} \quad (20)$$

Остается рассмотреть параболическое мероопределение в пучке прямых (параболическое измерение углов). Абсолют в этом случае состоит из двух совпадающих прямых; каноническая основная форма имеет вид λ^2 , при прсжном способе задания прямой абсолют в этом случае служит дважды взятая ось координат $x^2 = 0$. Рассуждая, как в рубр. 3, придем к формуле

$$\theta = \frac{y_2}{x_2} - \frac{y_1}{x_1} = \frac{\mu_2}{\lambda_2} - \frac{\mu_1}{\lambda_1}. \quad (21)$$

Итак, в пучке прямых на плоскости также можно по общему замыслу Кэли установить тройное мероопределение; это ведет к тройкой геометрии в пучке прямых. То же относится и к пучку плоскостей. Вообще в любом образе первой ступени возможно тройное мероопределение; это служит основой для классификации геометрий типа Кэли — Клейна (§§ 77, 78).

Линейные преобразования, оставляющие абсолют в покое,

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \omega + y \sin \omega, \\ y' &= -x \sin \omega + y \cos \omega \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

в случае мнимого абсолюта и

$$\begin{aligned} x' &= x \operatorname{ch} \omega + y \operatorname{sh} \omega, \\ y' &= x \operatorname{sh} \omega + y \operatorname{ch} \omega \end{aligned}$$

в случае действительного абсолюта, оставляют инвариантным значение угла между прямыми.

В случае параболического абсолюта эти преобразования имеют вид:

$$\frac{\mu'}{\lambda'} = \frac{\mu}{\lambda} + \alpha.$$

§ 72. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИДЕИ РИМАНА

1. **Основной мемуар Римана.** Как в своих мемуарах [25], [26] и [27], так и в «Эрлангенской программе» [28] Клейн ссылается как на источник идей, которые приведены в этих работах, кроме мемуара Кэли [37], еще на два очень важных мемуара, именно на статьи Римана [57] и Гельмгольца [58], почти одновременно появившиеся в печати. Мысли, содержащиеся в этих мемуарах, носят очень общий характер. Нам казалось более целесообразным предпослать им соображения и выводы более частного характера, в которых эти замыслы получили осуществление; читателю после этого будет гораздо легче усвоить идеи Римана.

В 1854 г. Бернгард Риман получил звание приват-доцента Геттингенского университета. Для вступления в профессорскую коллегия ему нужно было прочесть перед факультетом пробную лекцию. Согласно установившемуся обычаю он предложил для этой цели три темы, из которых Гаусс избрал третью: «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». Вряд ли правильно мнение Дедекинда, что доклад был составлен так, чтобы он мог быть доступен всем членам факультета, значительное большинство которых математикой не владело. Вернее, это была лекция, составленная Риманом для Гаусса. Этим, действительно, объясняется форма изложения. На протяжении нескольких страниц изложен, вернее, намечен, ряд глубоких идей, получающих строго математическое выражение. Однако вычисления отсутствуют; указаны только результаты и притом в неясной, сжатой форме. Это не был мемуар, приготовленный автором к печати, это—незаконченное исследование. Риман сам этой лекции не опубликовал, находя ее недостаточно обработанной. После смерти Римана рукопись эта была извлечена Дедекиндом из его наследия и опубликована им в 1868 г.

Идеи Римана при всем своем своеобразии представляют собой развитие методов исследования поверхности, изложенных Гауссом в «*Disquisitiones generales*» [27] 1827 г. Руководящая мысль Гаусса, как известно, заключается в том, что точка на поверхности (конечно, в обыкновенном евклидовом пространстве) определяется двумя координатами, которые мы будем обозначать, модернизируя символику, через x^1 , x^2 , а элемент длины выражается заданной положительно определенной квадратичной формой от дифференциалов этих координат, именно (также в современных обозначениях)

$$ds^2 = g_{11} (dx^1)^2 + 2g_{12} dx^1 dx^2 + g_{22} (dx^2)^2; \quad (1)$$

коэффициенты g_{11} , g_{12} , g_{22} представляют собой функции от переменных x^1 , x^2 . Формой (1) определяются внутренние свойства поверхности как гибкой нерастяжимой пленки, т. е. свойства, остающиеся инвариантными при ее изгибании. В настоящее время само изгибание поверхности определяется, как такая ее деформация, которая оставляет инвариантной основную метрическую форму (1). К числу инвариантов изгибания принадлежит и установленная Гауссом мера кривизны поверхности. По образному выражению Гельмгольца основной гауссовой формой (1) устанавливается геометрия поверхности в том виде, в каком ее строил бы обитатель этой поверхности, которому недоступно третье измерение пространства.

В развитие этих идей Гаусса объектом (субстратом) геометрического исследования у Римана является многообразие (множество) n измерений, т. е. совокупность элементов, каждый из которых определяется n численными заданиями, координатами x^1 , x^2 , ..., x^n . Существенным здесь является

задание элемента многообразия n числами без всякого предварительного указания на то, какие средства дает самое строение многообразия для нахождения этих чисел; у Римана исследование многообразия начинается с того момента, как эти числа для каждой точки заданы. Этот первый шаг к арифметизации геометрии является характерным для риманова замысла. Клейн дал ему уже выражение, чуждое какой бы то ни было попытки укрыться при построении многообразий произвольного числа измерений за собственно пространственные представления; для него элемент многообразия есть совокупность n чисел $(x^1, x^2, \dots, x^n)$, а самое многообразие получило название численного многообразия (*Zahlenmanigfaltigkeit*); такое многообразие теперь принято обозначать символом X_n . С этого момента начинается процесс глубокого проникновения арифметических методов в геометрию и обратно. Говорят об «арифметизации геометрии» и о «геометризации анализа». Синтезу этих тенденций мы обязаны очень плодотворными исследованиями в различных отраслях математики.

2. Метрика в римановом пространстве. Возвратимся к Риману. Основное положение, определяющее все развитие его идей, заключается в установлении расстояния между двумя бесконечно близкими элементами $M(x^i)$ и $M'(x^i + dx^i)$. Руководясь выражением (1), установленным Гауссом для элемента длины на поверхности в евклидовом пространстве, когда эта поверхность отнесена к произвольным, с нею же связанным координатам, Риман полагает

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dx^j = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (2)$$

т. е., как уже сказано, выражает квадрат элемента длины положительно определенной квадратичной формой от дифференциалов координат dx^i , коэффициенты которой суть функции координат x^i . Это соотношение представляет собой не только обобщение формулы Гаусса на многообразие n измерений; оно вносит совершенно новую идею установления метрики многообразия путем ее фиксации в бесконечно малой его части. Таким образом эта идея, с одной стороны, прокладывает в область геометрии тот самый путь, которым шла теоретическая физика,—путь изучения сложного процесса через установление упрощенных законов, по которым он протекает в пределах бесконечно малого элемента в пространстве или во времени, а с другой стороны, она устанавливает общий прием для построения на основе исходного соотношения (2) беспрельдно многообразных геометрических систем. При целесообразном подборе эти системы могут служить действительными средствами для изучения явлений природы путем их геометрического отображения. К этому важному вопросу мы возвратимся ниже.

Соотношением (2) многообразие претворяется в «пространство», его элементы именуются точками. Иными словами, многообразие (множество) n измерений, в котором тем или иным путем (например, с помощью (2)) установлена метрика, стали называть **пространством n измерений**; часто пространством n измерений называют вообще многообразие n измерений, между элементами которого устанавливаются соотношения, аналогичные соотношениям классической геометрии. Эта терминология нередко приводила к недоразумениям, коренившимся в том, что ей приписывалось значение, которое геометры с ней отнюдь не соединяли. Пространство, как и многообразие n измерений, есть строго определенное математическое понятие, не содержащее ничего нереального. Совокупность

всех окружностей на плоскости составляет многообразие трех измерений, поскольку его элемент (окружность в заданной плоскости) определяется тремя числами: координатами центра и длиной радиуса. В том же смысле совокупность всех сфер в обычном пространстве составляет многообразие четырех измерений. Можно говорить о трехмерной геометрии кругов и четырехмерной геометрии сфер. Совокупность всех прямых в обыкновенном трехмерном пространстве составляет многообразие четырех измерений, поскольку прямая в пространстве определяется четырьмя численными заданиями (например, координатами ее следа на некоторой плоскости—скажем, на плоскости XU , и двумя угловыми координатами, определяющими ее направление). Иными словами, наше реальное пространство есть многообразие трехмерное как совокупность точек и многообразие четырехмерное как совокупность прямых. Совокупность всех эллипсов на плоскости есть многообразие пятимерное и т. д. Развертывая соответствующую геометрию, можно говорить о пятимерном пространстве эллипсов на плоскости и девятимерном пространстве эллипсоидов.

Пространство, в котором установлена метрика (или, как мы уже говорили выше, мероопределение) типа (2), называют римановым пространством¹⁾ n измерений; мы будем обозначать его символом R_n . Элемент длины в R_n определяется в каждой точке n^2 числами, составляющими квадратную матрицу:

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Впрочем, так как $g_{ij} = g_{ji}$, то число независимых элементов матрицы равно $\frac{1}{2}n(n+1)$. Во всем пространстве коэффициенты g_{ij} представляют собой функции от координат $x^1, x^2, \dots, x^n$.

В немногих словах Риман намечает путь самого построения метрической геометрии R_n . Риман разумеет под линией в R_n совокупность точек, координаты которых зависят от одной переменной t , так что

$$x^i = f^i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad (4)$$

выражая дифференциалы координат x^i через t и dt , мы получим (см. (2)) для этой кривой $ds = l(t)dt$, а длина дуги в данном интервале (t_1, t_2) выразится интегралом

$$s = \int_{t_1}^{t_2} l(t) dt. \quad (5)$$

Далее, если из какой-либо точки выходят две кривые, направления которых в общей точке задаются дифференциалами координат $dx^1, dx^2, \dots, dx^n$ и $\delta x^1, \delta x^2, \dots, \delta x^n$, то соотношением

$$\cos \theta = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{\delta x^\beta}{\delta s} \quad (ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta; \delta s^2 = g_{\alpha\beta} \delta x^\alpha \delta x^\beta) \quad (6)$$

определяется угол между этими кривыми в точке, из которой они исходят (правая часть этого равенства при положительной форме (2) всегда

¹⁾ Это есть риманово пространство в широком значении этого термина; более узкое значение, в котором его часто употребляют, будет указано особо.

представляет собой число, по модулю не превышающее 1). Далее инвариантно определяются элементы меры площади, объемов различных порядков и т. д. Строится исчерпывающая метрика пространства с заданной основной формой (2).

3. Геодезические линии в римановом пространстве. Теперь нетрудно обычным для вариационного исчисления путем разыскать кривые, для которых интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{dt} \frac{du^\beta}{dt}} dt,$$

выражающий длину дуги между заданными двумя точками, достигает минимума, — геодезические линии пространства. Из данной точки $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$ в данном направлении, определяемом дифференциалами координат $dx^1, dx^2, \dots, dx^n$ (вернее, их отношениями или их отношениями к элементу дуги ds), выходит одна и только одна геодезическая линия.

Выходящая из точки $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$ геодезическая линия, будучи отнесена к длине дуги s , отсчитываемой от произвольной ее точки, определяется системой дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

Коэффициенты $\Gamma_{\alpha\beta}^i$ — так называемые трехиндексные символы Христовеля — суть функции от координат $(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Христовель обозначает их через $\{\alpha\beta_i\}$, называет трехиндексными символами второго рода и выражает через предварительно определенные более простые символы $\Gamma_{i,\alpha\beta}$, которые он обозначает через $[\alpha\beta_i]$; именно:

$$\Gamma_{i,\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \right). \quad (8)$$

Это — трехиндексные символы первого рода, которые, как видим, непосредственно выражаются через коэффициенты основной метрической формы. Что касается символов второго рода $\Gamma_{\alpha\beta}^i$, то они выражаются через символы первого рода и коэффициенты основной формы (2); именно:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^i = g^{\lambda i} \Gamma_{\lambda,\alpha\beta}, \quad (9)$$

где по индексу λ производится суммирование от 1 до n ; здесь $g^{\lambda i}$ суть так называемые приведенные алгебраические дополнения определителя (3), т. е. $g^{\lambda i}$ есть алгебраическое дополнение члена $g_{\lambda i}$ определителя (3), разделенное на значение самого определителя.

Интегрируя уравнения (7) в предположении, что координаты $x^1, x^2, \dots, x^n$ при $s=0$ принимают значения, которые они имеют в точке M , а производные $\frac{dx^i}{ds}$ при $s=0$ принимают значения, которые они в точке M имеют в направлении искомой геодезической, получаем ко-

нечные уравнения последней¹⁾; вывод уравнений (7) по существу не отличается от того, который дан автором для поверхности ([⁶], I, стр. 414).

Конечно, без ближайшего ознакомления с началами римановой геометрии эти краткие указания не дают полной картины. Существенно важно себе уяснить основную идею Римана, согласно которой из каждой точки в каждом направлении выходит геодезическая линия.

Положим теперь, что в обыкновенном евклидовом пространстве из точки $M(x^1, x^2, x^3)$ выходят два линейных элемента (dx^1, dx^2, dx^3) и $(\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3)$, определяющих таким образом два направления, выходящих из точки M ; тогда третий элемент $(\theta x^1, \theta x^2, \theta x^3)$, выходящий из той же точки M , компланарный с ними, т. е. расположенный в определяемой ими плоскости, выражается линейными формами

$$\theta x^i = \alpha dx^i + \beta \delta x^i \quad (10)$$

при $i = 1, 2, 3$, где α и β — два числа, не обращающиеся совместно в нуль. В римановом пространстве R_n элемент $(\theta x^1, \theta x^2, \dots, \theta x^n)$, выходящий из точки $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$, считается компланарным с двумя элементами

$$(dx^1, dx^2, \dots, dx^n) \text{ и } (\delta x^1, \delta x^2, \dots, \delta x^n), \quad (11)$$

выходящими из той же точки, если имеют место соотношения вида (10) при всех значениях $i = 1, 2, \dots, n$ и при не зависящих от i коэффициентах α, β . Совокупность всех элементов, компланарных с двумя элементами (11) (т. е. соответствующих всем возможным значениям коэффициентов α и β , вернее, их отношениям), обладает тем свойством, что все элементы, входящие в нее, попарно компланарны. Они определяют как бы розетку компланарных направлений, «плоскую площадку», в которой они «лежат». Из точки M в каждом направлении этой площадки проходит геодезическая линия; их совокупность образует двумерную поверхность: каждая ее точка, достаточно близкая к M , определяется направлением геодезической, на которой эта точка лежит, и ее расстоянием от точки M , отсчитываемым по упомянутой геодезической. Говорят, что эта поверхность — геодезическая в пространстве R_n в точке M и для данной двумерной площадки.

4. Кривизна риманова пространства. Поскольку геодезическая поверхность любой точки есть поверхность двумерная, она в каждой своей точке имеет определенную гауссову кривизну; Риман называет ее кривизной пространства R_n в точке M относительно плоской площадки, по которой эта поверхность построена. Таким образом нельзя говорить о кривизне пространства R_n в данной его точке M ; можно говорить о его кривизне в точке M в определенной двумерной ориентации, т. е. относительно определенной проходящей через нее плоской площадки («двумерного элемента», как говорит сам Риман); последняя определяется двумя выходящими из этой точки линейными элементами или направлениями $(dx^1, dx^2, \dots, dx^n)$ и $(\delta x^1, \delta x^2, \dots, \delta x^n)$. Риман дает указания, как по этим заданиям вычислить соответствующую кривизну. Публикуя мемуар Римана,

¹⁾ Не всегда кривые, определяемые дифференциальными уравнениями (7), действительно имеют наименьшую длину. Во времена Римана это было недостаточно выяснено.

Дедекинд эти вычисления выполнил. Одно существенное обстоятельство, однако, отмечено самим Риманом. Назовем координатным двумерным элементом такую плоскую площадку, которая определяется двумя линейными элементами, направленными по двум координатным линиям $(dx^1, 0, 0, \dots, 0)$ и $(0, \delta x^2, 0, \dots, 0)$. Таких двумерных координатных элементов в пространстве R_n в каждой точке, очевидно, имеется $\frac{n(n-1)}{2}$. Риман указывает, что кривизнами пространства относительно $\frac{n(n-1)}{2}$ координатных площадок определяется кривизна пространства относительно любой плоской площадки в той же точке; более того, он утверждает также, что заданием этих $\frac{n(n-1)}{2}$ координатных кривизн в каждой точке определяется и метрическая форма пространства (2). В такой формулировке это утверждение не установлено; важное значение имеет частный случай, которому посвящена следующая рубрика.

5. Риманово пространство постоянной кривизны. Риман останавливается на том случае, когда кривизна пространства имеет в данной его точке одинаковое значение для всех координатных площадок; в этом случае доказано, что кривизна сохраняет в этой точке то же значение, к какому бы двумерному элементу (к какой плоской площадке) мы бы ее ни относили; пространство имеет в этой точке постоянную кривизну.

Позже Ф. Шур^[59] доказал следующую замечательную теорему. Если риманово пространство имеет в каждой точке некоторой области определенную кривизну, не зависящую от ориентации площадки, то оно в этой области сохраняет ту же кривизну при переходе от точки к точке; оно имеет во всей этой области постоянную кривизну. До некоторой степени Риман предвосхищает это предложение. Во всяком случае в последней части своего мемуара он сосредоточивает внимание на пространствах постоянной кривизны. Без доказательств Риман указывает, что в пространстве, имеющем постоянную кривизну K , элемент длины в надлежащей координации может быть приведен к виду

$$ds = \frac{\sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2}}{1 + \frac{K}{4} [(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2]}; \quad (12)$$

обратно, пространство, метрически определяемое формулой (12), имеет постоянную кривизну K .

Останавливаясь на пространствах постоянной кривизны, Риман указывает, что кривизна может сохранять одно и то же постоянное значение во всех точках и двумерных направлениях только в тех пространствах, в которых возможно передвижение фигур (линий, поверхностей, тел) без разрывов и растяжений. О том, как он понимает «передвижение» фигур при своем своеобразном взгляде на пространство любого числа измерений, Риман ничего не говорит. Вряд ли, однако, он это понимал иначе, чем позже это формулировал Клейн в Эрлангенской программе. Выражаясь соответственно этому более точным современным языком, мысль Римана нужно несомненно понимать так, что постоянную кривизну имеют те пространства, в которых роль группы движений играет транзитивная группа непрерывных преобразований, оставляющих инвариантной «основную» метрическую форму (2).

В качестве пояснения этих утверждений Риман останавливается на поверхностях постоянной кривизны в обыкновенном евклидовом пространстве,—собственно говоря, на поверхностях вращения постоянной кривизны. Его высказывания, относящиеся к этим поверхностям, недостаточно обоснованы, но, несомненно, должны быть рассматриваемы как предвосхищение работ Миндинга и Бельтрами (см. стр. 38). Откладывая изложение заключительного параграфа мемуара Римана, мы здесь остановимся предварительно на мемуаре Гельмгольца.

6. Мемуар Гельмгольца. Непосредственно после того, как была опубликована лекция Римана, появился очень интересный мемуар Гельмгольца (H. Helmholtz ^[58]), вызванный, как он сам на это указывает, работой Римана. Самое название своей работы он явно противопоставляет названию мемуара Римана—он ее называет «О фактах, лежащих в основании геометрии» (Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen); физиолог, стоящий по существу на материалистических позициях, противопоставляет факты гипотезам Римана. Соображения, изложенные в этой работе, чрезвычайно интересны; всякому математику целесообразно прочитать ее в подлиннике; мы здесь, однако, вынуждены ограничиться теми рассуждениями, которые непосредственно связаны с идеями Римана.

Гельмгольц указывает, что соображения, идущие из области физиологической оптики, именно изучение многообразия цветов и измерения поля зрения, привели его к тем же основным идеям, которые излагает Риман. Но результаты, к которым он пришел, существенно отличаются от выводов Римана.

Сопоставим их установки. Риман, как указано выше, исходит из численного многообразия n измерений (элементы многообразия заданы каждый n числами—координатами) и метрическую геометрию этого многообразия строит на основе наперед заданной—характеризующей эту геометрию—основной (метрической) квадратичной дифференциальной формы (2). Многообразие, заданное в соединении с такой формой, он называет пространством n измерений. Установив затем понятие о кривизне пространства в заданной точке и данной в этой точке двумерной площадке, Риман переходит к пространствам постоянной кривизны; он указывает, что таковую может иметь только пространство, в котором возможно свободное передвижение; иначе говоря, это есть условие, **н е о б х о д и м о** для того, чтобы пространство имело постоянную кривизну.

Гельмгольц ставит себе целью доказать, что это условие не только необходимо, но и достаточно; иными словами, он ставит себе задачей показать, что пространство, в котором существует «свободное движение», всегда допускает квадратичную форму от дифференциалов координат, которая при этих движениях не меняет своего значения. Под «свободным движением» он разумеет транзитивную группу преобразований, в которой возможно вращение вокруг любого линейного элемента с одной степенью свободы. Подробнее это значит следующее: если удерживаем неподвижно точку P и произвольный выходящий из нее линейный элемент, то всегда еще возможно непрерывное движение; напротив, если кроме точки P и этого линейного элемента удерживаем еще один линейный элемент, выходящий из той же точки, то движение уже становится невозможным. Эту теорему Гельмгольц считает доказанной.

Как ни глубоки математические рассуждения Гельмгольца, однако с точки зрения строго выдержанной математики они вызывают, как это

показал С. Ли ^[60], серьезные возражения. Но самая теорема Гельмгольца при некотором уточнении ее формулировки действительно справедлива¹⁾.

7. Заключительные соображения Римана. Высказав общее положение о пространствах постоянной кривизны, Риман в последнем параграфе своего мемуара на них обстоятельно останавливается. Он подчеркивает различие, которое он усматривает между неограниченностью пространства и конечностью его размеров. Пространство *н е о г р а н и ч е н н о* — это означает, что по его геодезической линии можно неограниченно двигаться в одном направлении; так это имеет место в евклидовом пространстве, причем здесь движение по прямой не возвращает точки в исходное положение; так это имеет место и на сфере, причем, однако, на сфере точка, движущаяся по геодезической линии, неизбежно возвращается в точку исхода. Пространство *к о н е ч н о* — означает, что в нем каждая геодезическая имеет конечную длину, как на сфере. Риман утверждает, что в этом смысле всякое пространство постоянной положительной кривизны (как бы мала эта кривизна ни была) конечно.

Идея пространства любого числа измерений (хотя бы даже трех измерений) постоянной положительной кривизны впервые появляется в этом мемуаре Римана; поэтому такое пространство сохранило название риманова пространства в узком смысле этого слова. Таким образом термин *р и м а н о в а г е о м е т р и я* в литературе настоящего времени употребляется в двояком смысле слова: под «римановой геометрией» в широком смысле слова разумеют геометрию многообразия, элемент которого задан квадратичной дифференциальной формой вида (2); под «римановой геометрией» в узком значении этого слова разумеют геометрию пространства (многообразия) постоянной положительной кривизны. Риманову геометрию в широком смысле этого слова в числе первых развешивали русские ученые Б. К. Млодзеевский ^[61] и Ф. М. Суворов ^[62]. Эта геометрия получила в настоящее время широкое развитие: обстоятельное ее изложение находим в книге Эйзенхарта, которая переведена на русский язык ^[63]. Очень хорошее доступное ее изложение содержится в книгах П. К. Рашевского ^[64], ^[65]. Относительно римановой геометрии в широком смысле слова мы ограничиваемся этими указаниями, потому что эта дисциплина в настоящее время уже принадлежит дифференциальной геометрии, хотя руководящие идеи ее возникли в ходе изысканий по основаниям геометрии.

Что касается римановой геометрии в узком смысле, т. е. геометрии пространств постоянной положительной кривизны, то она по особенностям своей структуры, по ее связи с геометрическими системами Евклида и Лобачевского, по идеям, которые она вносит в аксиоматику, неразрывно связана с учением об основаниях геометрии. Посвящая ей следующую главу, мы должны ближе остановиться на ее определении.

8. Геометрия Евклида, Лобачевского и Римана в R_n . Выражения квадрата элемента длины в гиперболической плоскости (см. ч. I, формулы (LXXVII), стр. 359 и (LXXXII), стр. 364) и в гиперболическом пространстве (см. ч. I, формулы (CVI), стр. 452 и (CVIII), стр. 453) в декартовых и бельтрамиевых координатах обнаруживают, что гиперболическая плоскость и гиперболическое пространство принадлежат к числу римано-

¹⁾ Точное определение «свободного движения», как мы его выше формулировали, принадлежит Клейну.

вых пространств соответственно двух и трех измерений в широком значении слова (рубр. 2); но они ведут к более точному определению места, которое гиперболическая геометрия занимает среди R_n , т. е. к римановой геометрии в широком значении слова. Формула (LXXXVI) (ч. I, стр. 366) для основной метрической формы в гиперболической плоскости и аналогичная формула в гиперболическом пространстве обнаруживают, что гиперболическая плоскость и гиперболическое пространство представляют собой пространства постоянной отрицательной кривизны в римановом значении этого слова; причем эта постоянная кривизна K равна $-\frac{1}{k^2}$, где k имеет то же значение, что и в гиперболической геометрии. Определение кривизны гиперболического пространства и гиперболической плоскости, данное на стр. 346 ч. I, таким образом, совпадает с определением кривизны этого пространства, как ее устанавливает Риман. Формальное определение кривизны, данное выше, приобретает, таким образом, геометрическое содержание, заключающееся в определении кривизны любого пространства R_n . Евклидова геометрия есть геометрия пространства нулевой кривизны. Полагая в формуле (12) кривизну равной нулю, мы получаем основную метрическую дифференциальную форму евклидова пространства.

Всю геометрию гиперболического и евклидова пространства можно строить аналитически, исходя из основной формы (12). При этом общие задачи обеих геометрий обычно приводят к системам дифференциальных уравнений (прежде всего к дифференциальным уравнениям геодезических линий), интегрирование которых дает только результаты, носящие локальный характер. Так, мы видели, что в трехмерном евклидовом пространстве поверхности постоянной кривизны (псевдосферические поверхности) локально несут на себе геометрию Лобачевского. Каждая поверхность в евклидовом пространстве трех измерений, развертывающаяся на плоскость, также локально несет на себе двумерную геометрию Евклида. Другой путь построения этих геометрий и притом «в целом» ведет через создание каждый раз специальной аксиоматики. Когда мы говорим о геометрии Евклида в ее классической форме, получившей выражение в его «Началах», то мы имеем в виду определенную форму геометрии пространства нулевой кривизны. Она устанавливается аксиоматикой, которая имеет исключительное значение.

Точно так же геометрия Лобачевского представляет одну из форм осуществления геометрии пространства постоянной отрицательной кривизны; она также опирается на определенную аксиоматику, отличающуюся только одним постулатом от аксиоматики геометрии Евклида.

Обращаясь к геометрии пространства постоянной положительной кривизны, определяемой основной дифференциальной формой (12) при положительном значении постоянной K , следует отметить, что для случая двух измерений среди ее осуществлений выделяется с ф е р и ч е с к а я г е о м е т р и я (геометрия сферы) и особенная ее модификация — э л л и п т и ч е с к а я г е о м е т р и я; они имеют аналоги в трехмерной геометрии (§§ 74, 75). Именно этим последним геометриям обыкновенно присваивается название римановой геометрии в узком значении этого слова (см., например, С. А. Богомолов [66]).

Резюмируем. Имеются различные формы осуществления геометрии нулевой кривизны. Всякая геометрия пространства нулевой кривизны локально совпадает с геометрией некоторой области пространства Евклида. Имеются также различные формы осуществления геометрии пространства

любой отрицательной кривизны, т. е. пространства Лобачевского: всякая геометрия пространства отрицательной кривизны локально совпадает с геометрией некоторой области пространства Лобачевского той же кривизны. Наконец, имеются различные формы осуществления геометрии пространства положительной кривизны. Среди них особое место занимает геометрия Римана в двух ее модификациях: сферической и эллиптической. Всякая геометрия пространства положительной кривизны локально совпадает с геометрией некоторой области пространства Римана.

Аксиоматика сферической и эллиптической геометрии значительно сложнее, чем аксиоматика евклидовой или гиперболической геометрии. В следующих четырех параграфах мы изложим начала геометрии Римана одного, двух и трех измерений в аналитическом построении. Помимо большей простоты, это будет полезно для сопоставления с синтетическим построением геометрии Лобачевского.

ГЛАВА ШЕСТНАДЦАТАЯ

ОСНОВЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 73. ГЕОМЕТРИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

1. Введение. Мы начнем изложение эллиптической геометрии с простейшего, одномерного случая—с геометрии эллиптической прямой. Эллиптическая геометрия при любом числе измерений, как мы увидим, тесно связана со сферической геометрией, т. е. с геометрией на сфере того же числа измерений. При этом в одномерном случае сфера оказывается просто окружностью. Геометрию на окружности мы и положим в основу этого параграфа. Для простоты радиус окружности мы принимаем за единицу длины и начинаем, следовательно, с изучения одномерного многообразия, представляющего собой окружность радиуса единицы.

2. Определение точки двумя координатами. При изучении этого многообразия мы будем определять в нем точку (как точку окружности радиуса 1) двумя координатами x, y , связанными уравнением

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (1)$$

Уже при этом определении точки возникает двоякая возможность, ведущая к раздвоению рассматриваемой геометрии. В самом деле, если этому уравнению удовлетворяют числа x, y , то ему удовлетворяют также числа $-x, -y$. В связи с этим при аналитическом построении мы можем смотреть на (x, y) и $(-x, -y)$ либо как на две различные точки рассматриваемого многообразия, либо же как на одну и ту же точку, заданную двумя способами. Это создает две формы геометрии, которые Киллинг (W. Killing [67]) назвал взаимно полярными. Различие между ними соответствует тому, что две противоположные точки окружности можно считать различными (как это обыкновенно делается в элементарной геометрии) или можно их совокупность считать единым объектом, все же называя его т о ч к о й. Некоторая странность последней терминологии, которая возникает при сопоставлении ее с обычным представлением о различных точках окружности, устраняется при другой интерпретации той же геометрии. Геометрию окружности естественно связать с геометрией пучка лучей или прямых, выходящих из ее центра. Если рассматривать пучок л у ч е й, то это совпадает с первой точкой зрения: каждый луч, направленный к OX под углом ϑ , можно определить парой чисел $(x = \cos \vartheta, y = \sin \vartheta)$, удовлетворяющих уравнению (1); при этом числа (x, y) и $(-x, -y)$ определяют два различных (противоположных) луча. Таким образом точки окружности и лучи пучка взаимно однозначно соответствуют друг другу. Если же рассматривать пучок п р я м ы х, то те же две пары чисел определяют одну и ту же прямую; прямые пучка

взаимно однозначно соответствуют парам противоположных точек окружности. Мы будем говорить о т о ч к а х, предоставляя читателю представлять их себе в виде обыкновенных точек или лучей, пар противоположных точек или прямых, смотря по характеру рассматриваемой геометрии. Во всяком случае мы получаем две различные геометрические системы. Первую систему целесообразно представлять себе как геометрию окружности или пучка лучей. Эту геометрию называют *одномерной сферической геометрией* или *геометрией сферической прямой* (т. е. окружности большого круга на сфере). Вторую систему проще всего представить себе как геометрию пучка прямых; ее называют *одномерной эллиптической геометрией* или *геометрией эллиптической прямой*; в связи с метрикой, устанавливаемой в следующей рубрике, это приводит к терминологии, которой мы уже пользовались выше (§ 71, рубр. 1). Различие между этими двумя геометриями весьма существенно при числе измерений 2 и выше. Но рассматриваемая нами одномерная геометрия как в первом, так и во втором случае есть по существу геометрия на замкнутой не самопересекающейся кривой, во втором случае лишь вдвое более короткой, чем в первом (длины π вместо 2π). Как в одной, так и в другой системе за группу автоморфизмов примем совокупность ортогональных преобразований

$$x' = ax + by, \quad y' = a'x + b'y, \quad (2)$$

так что

$$a^2 + a'^2 = 1, \quad b^2 + b'^2 = 1, \quad ab + a'b' = 0 \quad (3)$$

и, следовательно, определитель преобразований равен ± 1 :

$$ab' - a'b = \pm 1. \quad (3')$$

Вследствие однородности линейного преобразования (3) каждое такое преобразование, переводящее значения x, y в x', y' , переводит также значения $-x, -y$ в $-x', -y'$. В связи с этим определение автоморфизмов как линейных преобразований (2) принято как для сферической, так и для эллиптической геометрии. В евклидовой плоскости преобразование (2), в котором определитель $ab' - a'b = +1$, выражает *скольжение* окружности (1) по самой себе; преобразование же (2), в котором $ab' - a'b = -1$, в евклидовой плоскости выражает *отражение* окружности (1) от одного из диаметров. Эти названия — *скольжения* (или *движения*) и *отражения* — сохраняются в тех же случаях для сферической и для эллиптической геометрии. При этом каждая точка M может быть переведена в любую другую точку M' окружности как *скольжением*, так и *отражением*.

3. Расстояние между двумя точками. Под *расстоянием* между двумя точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) в сферической геометрии разумеют число ρ , для которого

$$\cos \rho = x_1 x_2 + y_1 y_2, \quad 0 \leq \rho \leq \pi. \quad (4)$$

Ясно, что ρ есть длина дуги, соединяющей данные точки, не превышающая π . Так как $x_1 x_2 + y_1 y_2$ в рассматриваемых условиях по абсолютной величине не превышает 1, то такое значение ρ всегда можно найти. Оно не меняется ни при движении, ни при отражении.

В эллиптической геометрии расстояние ρ между двумя точками определяется двузначно: именно одно его значение определяется тем же соотношением (4), второе определяется формулой $\rho' = \pi - \rho$; меньшее из этих значений, таким образом, не превышает $\frac{\pi}{2}$, большее

же не меньше $\frac{\pi}{2}$. Их совокупность не меняется (остается инвариантной) как при движениях (скольжениях) и отражениях, так и при замене (x_1, y_1) через $(-x_1, -y_1)$ или (x_2, y_2) через $(-x_2, -y_2)$. Вообще эллиптическая геометрия изучает те величины и соотношения, которые остаются инвариантными как при преобразованиях (2) (движениях и отражениях), так и при замене координат любой точки их противоположными значениями (т.е. при замене x, y через $-x, -y$). Именно для соблюдения этой инвариантности расстояние между двумя точками определяется двузначно.

В эллиптической геометрии две точки, оба расстояния между которыми равны $\frac{\pi}{2}$, называют взаимно полярными: каждой точке x_1, y_1 соответствует в этой геометрии одна и только одна полярная точка x_2, y_2 , для которой

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0,$$

именно:

$$x_2 = y_1, y_2 = -x_1, \quad \text{или} \quad x_2 = -y_1, y_2 = x_1.$$

4. Взаимное расположение двух пар точек на эллиптической прямой. Как известно, на окружности не имеет смысла утверждение, что точка C расположена между точками A, B : точки A, B делят окружность на две равноправные (хотя, вообще говоря, и неодинаковой длины) дуги. Не имеет смысла понятие «между» и в эллиптической геометрии (ср. § 72, рубр. 1).

Однако другое понятие, выражающееся в том, что одна пара точек окружности разделяет или не разделяет другую пару точек, сохраняется в эллиптической геометрии. Две точки M_1, M_2 окружности делят эту окружность на две дуги; если две другие точки N_1 и N_2 расположены на одной из этих двух дуг, то говорят, что они не разделяют пару точек M_1, M_2 ; если же одна из точек, N_1 , лежит на одной из двух дуг, а другая, N_2 , лежит на другой, то говорят, что точки N_1, N_2 разделяют пару точек M_1, M_2 . Это относительное расположение двух пар точек при надлежащем его понимании можно установить и на эллиптической прямой. Чтобы это обнаружить, установим аналитический критерий, решающий, разделяют ли две данные точки две другие или не разделяют их.

Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) будут координаты точек M_1 и M_2 на окружности (1), ξ, η — координаты точки N , лежащей на той же окружности и отличной от M_1 и M_2 . Составим дробь

$$\frac{x_1 \eta - y_1 \xi}{x_2 \eta - y_2 \xi}. \quad (5)$$

Возьмем теперь две точки $N_1(\xi_1, \eta_1)$ и $N_2(\xi_2, \eta_2)$, причем все четыре точки M_1, M_2, N_1, N_2 предполагаются различными. Для каждой из точек N_1, N_2 составим соответствующую дробь (5). Тогда отноше-

ние этих дробей

$$\frac{x_1\eta_1 - y_1\xi_1}{x_2\eta_1 - y_2\xi_1} : \frac{x_1\eta_2 - y_1\xi_2}{x_2\eta_2 - y_2\xi_2}, \quad (6)$$

вычисленное для точек M_1, M_2 и N_1, N_2 , будем обозначать через $\{M_1, M_2; N_1, N_2\}$.

Заметим, что выражение (6) легко преобразовать к виду

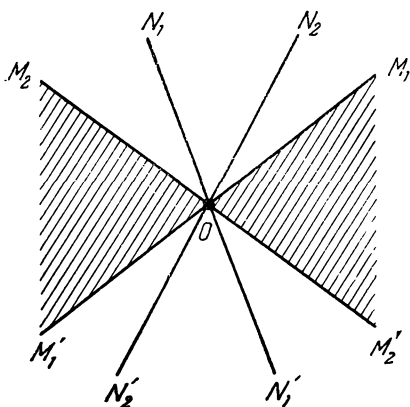
$$\frac{\sin(\vartheta_1 - \tau_1)}{\sin(\vartheta_1 - \tau_2)} : \frac{\sin(\vartheta_2 - \tau_1)}{\sin(\vartheta_2 - \tau_2)}, \quad (6a)$$

где $\tau_1, \tau_2, \vartheta_1, \vartheta_2$ суть полярные углы соответственно точек M_1, M_2, N_1, N_2 . Для этого достаточно воспользоваться для точки M_1 формулами

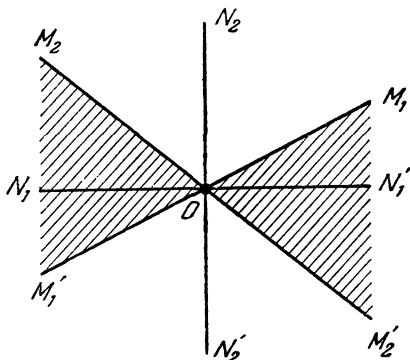
$$x_1 = \cos \tau_1, \quad y_1 = \sin \tau_1$$

и аналогично для других точек.

Выражение (6) не меняет своего значения, если у координат любой из четырех точек переменить знаки на обратные, т. е. заменить



Черт. 73.



Черт. 74.

любую из этих точек на противоположную. Поэтому можно считать, что выражение (6) составлено для четырех точек эллиптической прямой, т. е. точки M_1, M_2, N_1, N_2 берутся с точностью до замены каждой из них на противоположную. Выражение (6) $\{M_1, M_2; N_1, N_2\}$ называется двойным отношением четырех точек эллиптической прямой. Мы будем говорить, что на эллиптической прямой точки N_1 и N_2 разделяют пару точек M_1 и M_2 , если двойное отношение $\{M_1, M_2; N_1, N_2\}$ имеет отрицательное значение, и не разделяют их, если двойное отношение имеет положительное значение.

Геометрический смысл этого определения хорошо иллюстрируется интерпретацией эллиптической геометрии на пучке прямых (черт. 73). Прямые M_1M_1' и M_2M_2' (два элемента пучка, две «точки» этой геометрии) образуют две пары вертикальных углов; прямые N_1N_1' и N_2N_2' , лежащие в одной и той же паре этих вертикальных углов, не разделяют прямых M_1M_1' и M_2M_2' (черт. 73); напротив, на черт. 74 прямые N_1N_1' и N_2N_2' разделяют пару прямых M_1M_1' и M_2M_2' , потому что проходят в различных парах вертикальных углов, образуемых последними. Действительно, в случае, изображенном на черт. 73, как легко убе-

даться, дроби, входящие в (6а), имеют одинаковые знаки, так что их отношение положительно; напротив, в случае, изображенном на черт. 74, дроби имеют разные знаки и их отношение отрицательно.

5. Основные свойства взаимного расположения двух пар точек эллиптической прямой. Из установленного аналитического критерия непосредственно вытекают следующие выводы.

а) Если точки N_1 и N_2 разделяют пару точек M_1 и M_2 , то и обратно точки M_1 и M_2 разделяют точки N_1 и N_2 : две пары точек одновременно разделяют (или не разделяют) друг друга.

б) Если как точки N , N_1 , так и точки N , N_2 разделяют (или не разделяют) пару точек M_1 , M_2 , то точки N_1 и N_2 ее не разделяют.

с) Если точки N , N_1 разделяют пару точек M_1 , M_2 , а точки N , N_2 ее не разделяют, то точки N_1 , N_2 разделяют пару точек M_1 , M_2 .

д) Если A есть произвольная точка эллиптической прямой, а B , C , D — три другие точки, то A вместе с одной из этих трех точек разделяют остальные две точки. Подробнее, имеет место одно из трех расположений: либо точки A и B разделяют точки C и D , либо точки A и C разделяют точки B и D , либо точки A и D разделяют точки B и C .

Читателя не затруднит доказать эти предложения; впрочем, доказательство последнего из них мы здесь все же приведем, доказательство же остальных основаны на аналогичных приемах.

Пусть точка A определяется числами x , y , точка B — числами ξ_1 , η_1 , точка C — числами ξ_2 , η_2 , точка D — числами ξ_3 , η_3 . Составим двойные отношения

$$\{A, C; B, D\} = \frac{x\eta_1 - y\xi_1}{\xi_2\eta_1 - \eta_2\xi_1} : \frac{x\eta_3 - y\xi_3}{\xi_2\eta_3 - \eta_2\xi_3},$$

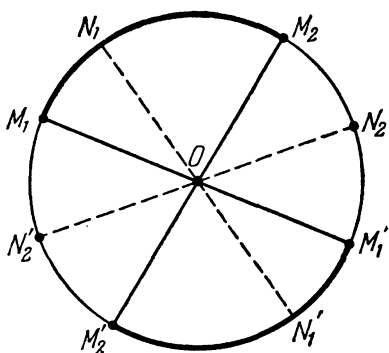
$$\{A, D; C, B\} = \frac{x\eta_2 - y\xi_2}{\xi_3\eta_2 - \eta_3\xi_2} : \frac{x\eta_1 - y\xi_1}{\xi_3\eta_1 - \eta_3\xi_1},$$

$$\{A, B; D, C\} = \frac{x\eta_3 - y\xi_3}{\xi_1\eta_3 - \eta_1\xi_3} : \frac{x\eta_2 - y\xi_2}{\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2},$$

где второе и третье получаются из первого круговой подстановкой индексов 1, 2, 3. Произведение этих трех двойных отношений равно -1 . Поэтому, по крайней мере, одно из этих двойных отношений имеет отрицательное значение, а это означает, что точка A , по крайней мере, с одной из точек B , C , D разделяет две другие точки. Можно было бы доказать, что такое разделение имеет место только с одной из этих точек.

6. Деление эллиптической прямой на части двумя ее точками. Пусть M_1 и M_2 — две различные точки эллиптической прямой, N — какая-либо третья точка, отличная от каждой из них. Все точки прямой разобьем на две категории; именно, отнесем к первой категории все те точки N_1 , которые вместе с N не разделяют пары точек M_1 , M_2 , ко второй — все те точки N_2 , которые вместе с N разделяют пару точек M_1 , M_2 . Из установленных предложений вытекает, что всякая точка прямой, отличная от M_1 и M_2 , попадет в одну и только в одну из этих категорий; при этом две точки одной категории не разделяют точек M_1 и M_2 , а две точки различных категорий разделяют их. Таким образом две различные точки

M_1 и M_2 эллиптической прямой разделяют ее на две части, обладающие указанным свойством. Эти две части называют взаимно дополнительными интервалами эллиптической прямой. Если точки M_1 и M_2 присоединяют к обоим интервалам, то их называют сегментами. При этом точки M_1 и M_2 называют крайними точками каждого сегмента, а остальные точки каждого сегмента называют внутренними его точками. Деление прямой точками M_1 и M_2 на два интервала (или сегмента) однозначно в том смысле, что оно не зависит от выбора точки N , при помощи которой деление произведено. Если эллиптическая прямая интерпретируется окружностью с отождествлением противоположных точек, то интервалы (или сегменты) представляют собой две пары противоположных дуг M_1M_2 , $M'_1M'_2$ и $M_1M'_2$, $M_2M'_1$ (черт. 75). Если она интерпретируется пучком прямых, то сегменты состоят из пучков, заполняющих одну и другую пару вертикальных углов. Чтобы отличить сегмент M_1M_2 , внутри которого лежит точка N , его обозначают M_1M_2/N .



Черт. 75.

Два сегмента, на которые две точки разбивают эллиптическую прямую, могут быть движением одного из них (вращением вокруг центра окружности или пучка) приведены в частичное или полное совмещение.

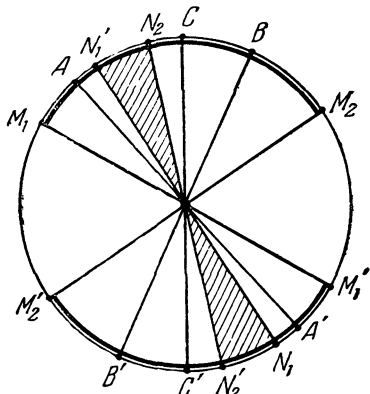
Сравнивая их, можно говорить о большем или меньшем из этих сегментов или об их равенстве. Из двух расстояний, свойственных двум точкам, меньшее часто рассматривается как длина меньшего сегмента, большее как длина большего сегмента, ими образуемого. Если эти сегменты равны, то их конечные точки взаимно полярны; длина каждого сегмента в этом случае равна $\frac{\pi}{2}$.

7. Расположение точек на сегменте эллиптической прямой. Положим, что три точки A , B , C лежат внутри некоторого сегмента M_1M_2 эллиптической прямой (черт. 76). Если точка C и одна из крайних точек M_1 сегмента разделяют пару точек A , B , то и другая крайняя точка M_2 с той же точкой C также разделяют ту же пару точек A , B . В этом случае говорят, что точка C на сегменте M_1M_2 лежит между точками A и B . О каждой внутренней точке сегмента также говорят, что она лежит между крайними его точками. Из трех точек сегмента одна и только одна лежит между двумя другими точками. Вообще точки сегмента в этом отношении имеют на эллиптической прямой такое же расположение, как и точки сегмента на евклидовой или гиперболической прямой.

Если точка C на сегменте M_1M_2 эллиптической прямой лежит между точками A и B , то она лежит также между ними на всяком другом сегменте N_1N_2 , которому эти три точки принадлежат, если один из двух сегментов составляет часть другого. Но если последнее условие не соблюдается, то вполне возможно, что на сегменте N_1N_2 окажется, что точка B лежит между A и C (или A

между B и C). Так, на черт. 76 точка C лежит между точками A и B на сегменте M_1M_2/c ; но на сегменте N_1N_2/c точка B лежит уже между A и C .

В евклидовой (или гиперболической) геометрии о трех точках A , B , C прямой можно говорить, что точка B лежит или не лежит между точками A и C независимо от того, в каком сегменте прямой берутся эти три точки. В эллиптической же геометрии такое утверждение имеет смысл только при указании сегмента прямой, на котором эти точки рассматриваются. Безотносительное понятие «между» эллиптической геометрии не свойственно. Вместе с тем ей не свойственна терминология, связанная с понятием «между» в евклидовой или гиперболической геометрии. В частности, одна точка не делит эллиптическую прямую на два луча, как это происходит в случае евклидовой или гиперболической прямой.



Черт. 76.

8. Эллиптическая прямая в системе Кэли. Координаты точки эллиптической прямой x , y , которыми мы до сих пор пользовались, можно заменить однородными координатами $X = \lambda x$, $Y = \lambda y$, где λ — произвольный множитель, отличный от 0; обратно, заданные однородные координаты можно нормировать, т. е. перейти к координатам x , y путем деления на $\sqrt{X^2 + Y^2}$:

$$x = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad y = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}. \quad (7)$$

В эллиптической геометрии этот радикал можно брать как в его положительном, так и в отрицательном значении; это ведет к противоположным знакам координат x , y .

Теперь, следуя Кэли, примем для мероопределения абсолют $X^2 + Y^2 = 0$; тогда расстояние между двумя точками определится по схеме Кэли двузначно (вследствие двойного знака радикала) формулой

$$\cos \rho = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2} \sqrt{X_2^2 + Y_2^2}} = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Абсолют мнимый — мероопределение эллиптическое; оно совпадает с тем, которое мы установили выше на эллиптической прямой. В терминологии, как мы видим, расхождения нет.

9. Эллиптическая и проективная прямая. Совокупность пар действительных чисел X , Y (не равных одновременно нулю) при условии, что числа λX , λY при произвольном действительном значении λ (отличном от нуля) определяют одну и ту же точку, называют **проективной прямой** (в аналитическом ее определении). Таким образом каждой точке проективной прямой соответствует точка эллиптической прямой и обратно. Однако при построении геометрии проективной прямой (одномерной проективной геометрии) за группу ее автоморфизмов принимают

все линейные преобразования:

$$X' = aX + bY, \quad Y' = a'X + b'Y, \quad ab' - a'b \neq 0. \quad (8)$$

Они отличаются таким образом от преобразований (2) только тем, что соотношения (3) между коэффициентами отпадают. Таким образом одномерная проективная геометрия может быть построена на эллиптической прямой, однако, при более широкой группе автоморфизмов. Вследствие этого метрика эллиптической прямой, инвариантность которой основана на ортогональности преобразований (2), в проективной геометрии отпадает.

§ 74. ГЕОМЕТРИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

1. Сферическая и эллиптическая геометрия двумерного многообразия. Под сферической геометрией в двумерном случае разумеют геометрию сферы или любого гомеоморфного ей многообразия с той же группой движений в трехмерном евклидовом пространстве (E_3). Такой же геометрией, как уже указано выше (§ 51, рубр. 4), обладает сфера и в гиперболическом пространстве. Другим очень естественным осуществлением двумерной сферической геометрии—другой простейшей ее интерпретацией—служит геометрия центральной связки лучей.

Для рассматриваемой геометрии возможна так называемая «полярная» ее форма. Она получается из геометрии сферы, если в последней совокупность двух противоположных точек принять за один объект, за «точку» двумерной геометрии. Эта «полярная» форма хорошо интерпретируется центральной связкой прямых; элементом этой геометрии является прямая, которую поэтому здесь в интересах сопоставления с геометрией сферы также целесообразно называть точкой. Эту геометрию в настоящее время называют двумерной эллиптической геометрией, а двумерное пространство, в котором она осуществляется, эллиптической плоскостью; мы будем обозначать последнюю через $\mathcal{E}_2$. Геометрия сферы во всех своих частях хорошо известна; мы остановимся поэтому на геометрии эллиптической плоскости. Таким образом эллиптическую плоскость (т. е. наиболее простую ее интерпретацию) можно себе представить как сферу с отождествленными противоположными точками или как центральную связку прямых. Геометрию эллиптической плоскости (как и всю эллиптическую геометрию) мы здесь строим аналитически.

2. Исходные начала геометрии эллиптической плоскости в аналитическом ее построении. Аналитически геометрия эллиптической плоскости ($\mathcal{E}_2$) определяется следующим образом.

1) Ее элемент (точка) определяется системой трех чисел (x, y, z) , связанных уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad (1)$$

Единица в правой части взята чисто условно (радиус соответствующей сферы принят за единицу); часто ее заменяют положительной постоянной k^2 ; число k в этом последнем случае называют постоянной эллиптической плоскости; число же $\frac{1}{k^2}$ называют ее кривизной. Мы принимаем, что числа x, y, z и $-x, -y, -z$ определяют один и тот же элемент, одну и ту же «точку» эллиптической плоскости; эти числа x, y, z (или $-x, -y, -z$) называются нормальными координатами точки в $\mathcal{E}_2$.

2) Основной группой допустимых в этой геометрии преобразований (ее автоморфизмов) служат линейные преобразования:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\ y' &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \\ z' &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

в которых коэффициенты образуют ортогональную матрицу. Эти преобразования называют движениями в $\mathcal{E}_2$. При этом при умножении всех коэффициентов на -1 преобразование не меняется, так как (x', y', z') и $(-x', -y', -z')$ определяют одну и ту же точку. Поэтому достаточно рассматривать ортогональные преобразования (2), в которых определитель матрицы равен 1. Это соответствует тому, что в $\mathcal{E}_2$ нет отражений как особого класса преобразований: все они могут быть получены в результате непрерывных движений.

3) Расстоянием между двумя точками x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 эллиптической плоскости называют число ρ , которое аналогично тому, как это делается на эллиптической прямой, определяется двузначным следующим образом: одно его значение определяется равенством

$$\cos \rho = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad \text{при } 0 \leq \rho \leq \pi, \quad (3)$$

а второе значение — равенством

$$\rho' = \pi - \rho. \quad (3')$$

Таким образом меньшее значение расстояния между двумя точками не превышает $\frac{\pi}{2}$, большее не превышает π ¹⁾. В этом смысле говорят, что эллиптическая плоскость конечна. Если меньшее значение расстояния равно нулю, то большее равно π ; это наступит в одном из двух случаев: либо когда $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$, либо когда $x_1 = -x_2, y_1 = -y_2, z_1 = -z_2$. Это следует из того, что

$$\begin{aligned} \sin^2 \rho &= 1 - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 = \\ &= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 = \\ &= (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Вследствие соотношения (1), имеющего место для одной и другой точки, это тождество при $\rho = 0$ или π приводит к формулированному утверждению. Ввиду того что в эллиптической геометрии точки (x_1, y_1, z_1) и $(-x_1, -y_1, -z_1)$ совпадают, значения расстояния между двумя точками обращаются в 0 и π в том и только в том случае, когда эти точки совпадают.

Две точки, расстояние между которыми (оба его значения) равно $\frac{\pi}{2}$, называют взаимно полярными. Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы две точки были взаимно полярными, выражается уравнением

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0. \quad (5)$$

¹⁾ Те же два значения расстояния (с перестановкой значений ρ, ρ') получим и из соотношения $\cos \rho = -x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2$ при $0 \leq \rho \leq \pi, \rho' = \pi - \rho$. Это замечание существенно в том смысле, что знаки координат x_1, y_1, z_1 (или x_2, y_2, z_2) могут быть изменены на обратные.

Расстояние (совокупность двух его значений) является инвариантом преобразований (2), т. е. сохраняется при движениях, а также, само собой разумеется, при преобразованиях

$$x' = -x, y' = -y, z' = -z, \quad (6)$$

не меняющих точек пространства. Этими свойствами оправдывается определение расстояния в эллиптической плоскости.

3. Элемент длины в эллиптической плоскости. Элемент длины $d\rho$, т. е. меньшее значение расстояния между двумя «бесконечно близкими» точками (x, y, z) и $(x + dx, y + dy, z + dz)$, согласно формуле (3) определяется из соотношения

$$\cos d\rho = x(x + dx) + y(y + dy) + z(z + dz),$$

или в обычных пределах приближения

$$1 - \frac{d\rho^2}{2} = (x^2 + y^2 + z^2) + (x dx + y dy + z dz);$$

ввиду же равенства (1) отсюда следует, что

$$d\rho^2 = -2(x dx + y dy + z dz).$$

А так как точка $x + dx, y + dy, z + dz$ лежит на той же эллиптической плоскости, то

$$(x + dx)^2 + (y + dy)^2 + (z + dz)^2 = 1.$$

Отсюда и из предыдущего равенства следует

$$d\rho^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (7)$$

Это и естественно, так как, рассуждаясь с моделью, можно сказать, что речь идет об элементе длины на евклидовой сфере в ортогональных декартовых координатах.

4. Прямая эллиптической плоскости. Ввиду выражения (7) элемента длины уравнение геодезической линии эллиптической плоскости вариационным путем устанавливается так же, как на евклидовой сфере. Эта линия выражается в нормальных координатах x, y, z однородным линейным уравнением, коэффициенты которого a, b, c не обращаются одновременно в нуль; ее здесь (в эллиптической плоскости) называют «прямой». В эллиптической плоскости координаты точки на прямой таким образом удовлетворяют двум уравнениям:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (8)$$

$$ax + by + cz = 0. \quad (8')$$

Значениям x, y, z , удовлетворяющим этим уравнениям, соответствуют значения $-x, -y, -z$, которые им также удовлетворяют. Если x, y, z есть произвольная точка, а x_1, y_1, z_1 полярная ей точка, то в силу равенства (5)

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0.$$

Это значит, что геометрическое место точек (x, y, z) эллиптической плоскости, полярных данной ее точке (x_1, y_1, z_1) , есть «прямая». Эта прямая называется полярной данной точки, а точка x_1, y_1, z_1 ,

$(-x_1, -y_1, -z_1)$ — полюсом прямой. Таким образом все точки поляры отстоят на расстоянии $\frac{\pi}{2}$ от полюса.

Коэффициенты a, b, c в уравнении (8') можно «нормировать», именно их можно заменить пропорциональными им числами α, β, γ , связанными соотношением

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \quad (9)$$

Эти числа α, β, γ определены с точностью до умножения на -1 ; взятые в качестве нормальных координат, они определяют точку эллиптической плоскости — полюс прямой (8'). Таким образом прямая определяется своим полюсом и, наоборот, определяет свой полюс.

5. Эллиптическая прямая на эллиптической плоскости. Каждую точку эллиптической плоскости можно движением совместить с любой другой ее точкой. Это осуществляется совершенно так же, как на евклидовой сфере: каждая пара ее противоположных точек (A, A') может быть совмещена с каждой другой парой противоположных точек (B, B') движениями и притом двумя различными способами: $A \rightarrow B, A' \rightarrow B'$ или $A \rightarrow B', A' \rightarrow B$.

Прямую $z=0$ в эллиптической плоскости будем называть ее экватором. Координаты $x, y, 0$ любой точки экватора связаны уравнением $x^2 + y^2 = 1$; движения в $\mathcal{E}_2$, сохраняющие экватор, будут выражаться уравнениями (3) предыдущего параграфа, а расстояние между двумя точками экватора выражается равенством (4) предыдущего параграфа. Мы можем смотреть на экватор в $\mathcal{E}_2$ как на эллиптическую прямую; а так как всякая прямая в $\mathcal{E}_2$ может быть совмещена с экватором (для этого достаточно совместить их полюсы), то всякую «прямую» в $\mathcal{E}_2$ можно считать «эллиптической прямой», как она определена в предыдущем параграфе.

6. Полюсы и поляры на эллиптической плоскости. Нормированные коэффициенты α, β, γ прямой

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \quad (10)$$

т. е. коэффициенты, связанные равенством (9), называются координатами этой прямой. Самое существенное в этой номенклатуре заключается в том, что полюс и его поляра имеют те же координаты. Это приводит к тому, что в $\mathcal{E}_2$ полюсы и их поляры сохраняют соотношения, свойственные полюсам и полярам кривой второго порядка в евклидовой плоскости. В самом деле, если точка M имеет в $\mathcal{E}_2$ координаты α, β, γ , то ее поляра μ выражается уравнением (10); если другая точка $M'(\alpha', \beta', \gamma')$ лежит на поляре μ (10) точки M , то

$$\alpha'\alpha + \beta'\beta + \gamma'\gamma = 0; \quad (11)$$

но α', β', γ' суть координаты поляры точки M' ; равенство (11) выражает также, что точка M лежит на поляре μ' точки M' . И наоборот, если поляра μ' точки M' проходит через точку M , то поляра μ точки M проходит через точку M' .

По существу, это основное предложение может быть сформулировано так: если три точки лежат на одной прямой, то их поляры проходят через одну точку, и наоборот: если три прямые проходят через одну точку, то их полюсы лежат на одной прямой.

В самом деле, пусть L, M, N будут три точки, лежащие на одной прямой; λ, μ, ν — их полярны. Так как точка N лежит на прямой LM , то ее поляр ν проходит через полюс $\bar{N}$ прямой LM ; по той же причине поляр λ точки L проходит через полюс $\bar{L}$ прямой MN и поляр μ точки M проходит через полюс $\bar{M}$ прямой NL . Но так как прямые LM, MN, NL совпадают, то совпадают и их полюсы $\bar{N}, \bar{L}, \bar{M}$, т. е. поляр λ, μ, ν имеют общую точку. Совершенно так же доказывается и обратная теорема.

7. Две прямые в эллиптической плоскости. Относительно двух прямых в эллиптической плоскости $\mathcal{E}_2$ имеют место две основные теоремы.

Первая основная теорема. Две различные прямые в эллиптической плоскости всегда пересекаются в одной и только одной точке.

В самом деле, если $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ и $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ суть координаты двух различных прямых, то определители

$$A = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1, \quad B = \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1, \quad C = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \quad (12)$$

не обращаются совместно в нуль. Координаты x, y, z общей точки этих двух прямых должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0, \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Числа x, y, z , удовлетворяющие этим уравнениям, должны выражаться формулами:

$$x = Ax, \quad y = Bx, \quad z = Cx,$$

где A, B, C суть определители (12) матрицы коэффициентов. Поэтому для общей точки должно быть

$$(A^2 + B^2 + C^2)x^2 = 1, \quad (14)$$

откуда находятся два противоположных по знаку значения x , определяющих одну и ту же точку пересечения этих прямых.

Вторая основная теорема. Через две различные точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) в эллиптической плоскости всегда проходит одна и только одна прямая.

Как легко проверить, искомая прямая выражается уравнением

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0. \quad (15)$$

Искомая прямая будет единственной, так как ее полюс должен совпадать с точкой пересечения поляр данных двух точек.

Необходимое и достаточное условие того, чтобы три точки лежали на одной прямой, выражается равенством

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (15a)$$

8. Угол между двумя прямыми в $\mathcal{E}_2$. Говорят, что прямые (13) в точке их пересечения образуют «угол»; этому углу приписывают два численных значения θ и θ' (численное значение угла определяется двузначно); именно полагают¹⁾:

$$\cos \theta = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad \theta' = \pi - \theta. \quad (16)$$

Так как $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ можно рассматривать так же, как координаты полюсов данных двух прямых, то угол θ (два значения) совпадает с расстоянием ρ между полюсами согласно (3) (тоже два значения). Угол имеет значения 0 и π , когда прямые совпадают. Прямые, угол между которыми равен $\frac{\pi}{2}$, называют взаимно перпендикулярными. Условие перпендикулярности двух прямых, таким образом, выражается уравнением

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0. \quad (17)$$

Из этого вытекает следующая теорема: пусть μ — поляра точки M ; тогда прямая, соединяющая точку M с любой точкой M_0 , лежащей на μ , перпендикулярна к μ . Действительно, пусть α, β, γ будут координатами точки M ; ее поляра μ выражается уравнением (10). Если точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на поляре μ , то

$$\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 = 0.$$

Уравнение прямой, соединяющей точку M с M_0 , есть

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т. е. } x(\gamma y_0 - \beta z_0) + y(\alpha z_0 - \gamma x_0) + z(\beta x_0 - \alpha y_0) = 0. \quad (18)$$

Сопоставляя его с уравнением (10) поляры точки M и используя тождество

$$\alpha(\gamma y_0 - \beta z_0) + \beta(\alpha z_0 - \gamma x_0) + \gamma(\beta x_0 - \alpha y_0) = 0,$$

мы видим, что прямая MM_0 перпендикулярна к поляре μ точки M .

9. Начало двойственности в эллиптической плоскости. Из изложенного видна аналогия, приводящая к так называемому началу двойственности в эллиптической плоскости. Точка в $\mathcal{E}_2$ задается тремя числами (x, y, z) , связанными уравнениями (1); числа x, y, z и $-x, -y, -z$ определяют одну и ту же точку. Прямая определяется тремя числами α, β, γ , связанными таким же уравнением (9); числа α, β, γ и $-\alpha, -\beta, -\gamma$ определяют одну и ту же прямую. Уравнение (10), которое не меняется, если числа α, β, γ заменить соответственно через x, y, z и обратно, выражает, что прямая (α, β, γ) и точка (x, y, z) «инцидентны», т. е. прямая проходит через точку, или, что то же, точка лежит на прямой. Значение угла между двумя прямыми выражается через их координаты так же, как значение расстояния между двумя точками выражается через их координаты — соответственно уравнениями (3) и (16). Так как из этих определений разворачивается вся геометрия эллиптической плоскости, то это

¹⁾ Те же два значения угла получим, конечно, если положим $\cos \theta = -\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2$, $0 \leq \theta < \pi$ и $\theta' = \pi - \theta$, причем θ и θ' поменяются местами.

и приводит к началу двойственности; оно заключается в том, что всякое предложение, относящееся к точкам и прямым эллиптической плоскости, остается в силе, если точки заменить прямыми и, обратно, прямые заменить точками (а также расстояние между точками заменить углом между прямыми, и обратно).

Простейшие из этих предложений, соответствующих друг другу по началу двойственности, заключаются в том, что через каждые две точки проходит одна прямая и каждые две прямые пересекаются в одной точке (каждым двум точкам соответствует одна инцидентная им прямая, каждым двум прямым — одна инцидентная им точка).

Если прямая (ξ, η, ζ) проходит через точку пересечения прямых $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, то точки соответственно теми же координатами, т. е. полюсы этих прямых, в силу теоремы рубр. 6 лежат на одной прямой; поэтому условие, необходимое и достаточное для того, чтобы названные три прямые проходили через одну точку, выражается уравнением

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

Если $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ считать данными, а (ξ, η, ζ) переменными, то уравнение (19) выражает условие, необходимое и достаточное для того, чтобы прямая (ξ, η, ζ) проходила через точку пересечения данных прямых; его рассматривают поэтому как уравнение точки пересечения этих прямых.

10. Пучок прямых. Если

$$U = 0, \quad V = 0 \quad (20)$$

суть уравнения двух прямых, то всякая прямая, проходящая через точку их пересечения, выражается уравнением

$$\lambda U + \mu V = 0, \quad (21)$$

где λ и μ суть постоянные, не обращающиеся одновременно в нуль. Прямая эта не меняется, если умножить коэффициенты λ и μ на одно и то же число (отличное от нуля).

Очевидно, что пучок прямых (21) несет на себе одномерную эллиптическую геометрию, вполне аналогичную геометрии эллиптической прямой (рубр. 5).

В частности, две прямые пучка (21) делят его на две части, подобно тому как две точки эллиптической прямой делят ее на два сегмента.

В соответствии с этим две прямые пучка всегда или разделяют или не разделяют две другие прямые этого пучка.

Если

$$\lambda' U + \mu' V = 0 \quad (22)$$

— уравнение другой прямой данного пучка, то прямые (21) и (22) не разделяют прямых (20), если дроби $\frac{\lambda}{\mu}$ и $\frac{\lambda'}{\mu'}$ имеют одинаковые знаки, и разделяют их, если эти дроби имеют различные знаки (см. рубр. 4 предыдущего параграфа); нужно учесть, что роль x, y теперь играют

λ, μ , причем для прямых (20) $\lambda=1, \mu=0$ и $\lambda=0, \mu=1$. Совершенно так же, если

$$U=0, \quad V=0 \quad (23)$$

суть уравнения двух различных точек, то всякая точка, лежащая на соединяющей их прямой, выражается уравнением

$$lU + mV = 0, \quad (24)$$

где l и m суть постоянные, не обращающиеся одновременно в нуль. Если

$$l'U + m'V = 0 \quad (25)$$

есть другая точка на прямой, соединяющей точки (23), то точки (24) и (25) не разделяют точек (23), если дроби $\frac{l}{m}$ и $\frac{l'}{m'}$ имеют одинаковые знаки, и разделяют их, если эти дроби имеют различные знаки.

11. Треугольник и трехсторонник в эллиптической плоскости.

Если $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ суть координаты трех точек M_1, M_2, M_3 , не лежащих на одной прямой, то мы будем говорить, что эти точки служат вершинами треугольника $M_1M_2M_3$ или трехсторонника $M_1M_2M_3$, смотря по тому, имеем ли мы в виду его вершины M_1, M_2, M_3 или его стороны — прямые M_1M_2, M_2M_3, M_3M_1 . Определитель

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \quad (26)$$

мы будем называть определителем этого треугольника (или трехсторонника). Если изменим знаки координат одной из вершин на обратные, то определитель δ переменит знак. Определитель треугольника устанавливается его вершинами, таким образом, с точностью до знака. Если через A_i, B_i, C_i обозначим алгебраические дополнения, соответствующие элементам определителя (26), то стороны треугольника (т. е. прямые M_2M_3, M_3M_1, M_1M_2 , попарно соединяющие его вершины) имеют соответственно уравнения (согласно (15))

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z &= 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Через Δ обозначим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}; \quad (28)$$

очевидно, матрица (28) после деления на δ превращается в транспонированную обратную матрицу (26)¹⁾, определитель ее принимает зна-

¹⁾ Мы будем говорить кратко: «матрица (26)», «матрица (28)», имея в виду матрицы соответствующих определителей.

чение $\frac{\Delta}{\delta^3}$ и в то же время он равен $1/\delta$. Поэтому $\Delta = \delta^2$. Положим

$$\left. \begin{aligned} A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 &= D_1^2, \\ A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 &= D_2^2, \\ A_3^2 + B_3^2 + C_3^2 &= D_3^2. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Теперь нормированные координаты сторон треугольника (трехсторонника) имеют значения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_1}{D_1}, \quad \frac{B_1}{D_1}, \quad \frac{C_1}{D_1}, \\ \frac{A_2}{D_2}, \quad \frac{B_2}{D_2}, \quad \frac{C_2}{D_2}, \\ \frac{A_3}{D_3}, \quad \frac{B_3}{D_3}, \quad \frac{C_3}{D_3}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Радикалы D_1, D_2, D_3 могут быть взяты с тем или другим знаком. Однако мы условимся в дальнейшем брать D_1, D_2, D_3 всегда положительными, вследствие чего координаты сторон будут вполне определяться координатами вершин.

Длины m_1, m_2, m_3 сторон треугольника $M_1M_2M_3$ определяются (каждая двузначно) равенствами:

$$\left. \begin{aligned} \cos m_1 &= \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3, \\ \cos m_2 &= \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1, \\ \cos m_3 &= \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2, \end{aligned} \right\} 0 \leq m_i \leq \pi, \quad (31)$$

при дополнительных значениях

$$m'_i = \pi - m_i. \quad (31')$$

Точно так же углы M_1, M_2, M_3 треугольника определяются (также двузначно) равенствами:

$$\left. \begin{aligned} \cos M_1 &= -(A_2A_3 + B_2B_3 + C_2C_3) : D_2D_3, \\ \cos M_2 &= -(A_3A_1 + B_3B_1 + C_3C_1) : D_3D_1, \\ \cos M_3 &= -(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2) : D_1D_2, \end{aligned} \right\} 0 \leq M_i \leq \pi, \quad (32)$$

$$M'_i = \pi - M_i. \quad (32')$$

Говоря о значениях углов, противолежащих сторонам (31) и (31'), мы будем подразумевать значения углов соответственно (32) и (32').

К этому присоединим равенства вида

$$\begin{aligned} \sin^2 m_1 &= 1 - (\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3)^2 = \\ &= (\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2)(\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2) - (\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3)^2 = A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 = D_1^2. \end{aligned}$$

Так как под D_1, D_2, D_3 мы подразумеваем положительные значения радикалов, определенных равенствами (29), то

$$\sin m_1 = D_1, \quad \sin m_2 = D_2, \quad \sin m_3 = D_3. \quad (33)$$

Из равенств (32) получаем далее

$$\sin^2 M_1 = \frac{D_2^2 D_3^2 - (A_2 A_3 + B_2 B_3 + C_2 C_3)^2}{D_2^2 D_3^2} \text{ и т. д.}$$

Если через $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{C}_i$ обозначить алгебраические дополнения элементов A_i , B_i , C_i определителя (28), то

$$\sin^2 M_1 = \frac{\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{C}_1^2}{D_2^2 D_3^2}$$

и таким же образом

$$\sin^2 M_2 = \frac{\mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{B}_2^2 + \mathfrak{C}_2^2}{D_3^2 D_1^2},$$

$$\sin^2 M_3 = \frac{\mathfrak{A}_3^2 + \mathfrak{B}_3^2 + \mathfrak{C}_3^2}{D_1^2 D_2^2}.$$

Из теории взаимных определителей известно, что

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{A}_1}{\Delta} &= \frac{\alpha_1}{\delta}, & \frac{\mathfrak{B}_1}{\Delta} &= \frac{\beta_1}{\delta}, & \frac{\mathfrak{C}_1}{\Delta} &= \frac{\gamma_1}{\delta}, \\ \frac{\mathfrak{A}_2}{\Delta} &= \frac{\alpha_2}{\delta}, & \frac{\mathfrak{B}_2}{\Delta} &= \frac{\beta_2}{\delta}, & \frac{\mathfrak{C}_2}{\Delta} &= \frac{\gamma_2}{\delta}, \\ \frac{\mathfrak{A}_3}{\Delta} &= \frac{\alpha_3}{\delta}, & \frac{\mathfrak{B}_3}{\Delta} &= \frac{\beta_3}{\delta}, & \frac{\mathfrak{C}_3}{\Delta} &= \frac{\gamma_3}{\delta}. \end{aligned}$$

Действительно, эти соотношения означают, что матрица (26) после деления на свой определитель δ представляет собой транспонированную обратную матрицу для матрицы (28), или, что то же самое, что (28) после деления на δ есть транспонированная обратная матрица для матрицы (26). Но последнее видно из самого построения матрицы (28). Теперь мы можем записать:

$$\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{C}_1^2 = (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2) \frac{\Delta^2}{\delta^2} = \frac{\Delta^2}{\delta^2} = \delta^2,$$

а вместе с тем

$$\sin^2 M_1 = \frac{\delta^2}{D_2^2 D_3^2}, \quad \sin^2 M_2 = \frac{\delta^2}{D_3^2 D_1^2}, \quad \sin^2 M_3 = \frac{\delta^2}{D_1^2 D_2^2},$$

откуда

$$\sin M_1 = \frac{|\delta|}{D_2 D_3}, \quad \sin M_2 = \frac{|\delta|}{D_3 D_1}, \quad \sin M_3 = \frac{|\delta|}{D_1 D_2}, \quad (34)$$

где $|\delta|$ — абсолютная величина определителя δ .

12. Треугольники «с фиксированной внутренностью». Фиксируем координаты вершин треугольника $M_1 M_2 M_3$; это значит, что, взяв определенным образом значения этих координат, мы не будем изменять их знаков; в частности, в определителе (26) будем считать элементы каждой горизонтали фиксированными, т. е. не будем их менять на $-\alpha_i$, $-\beta_i$, $-\gamma_i$, хотя такая замена и не меняла бы точки M_i . Если бы, однако, в том или ином случае было целесообразно за координаты точки M_i взять числа $-\alpha_i$, $-\beta_i$, $-\gamma_i$, то мы будем ее обозначать через $\overline{M}_i$. Таким образом на единичной сфере M_i и $\overline{M}_i$ суть противоположные ее точки, а в $\mathcal{E}_2$ эти точки совпадают.

Пусть теперь x , y , z будут координаты точки M , не лежащей ни на одной из прямых $M_1 M_2$, $M_2 M_3$, $M_3 M_1$. Рассмотрим отношения

$$\frac{A_2 x + B_2 y + C_2 z}{A_3 x + B_3 y + C_3 z} = \omega_1, \quad \frac{A_3 x + B_3 y + C_3 z}{A_1 x + B_1 y + C_1 z} = \omega_2, \quad \frac{A_1 x + B_1 y + C_1 z}{A_2 x + B_2 y + C_2 z} = \omega_3.$$

Их произведение $\omega_1 \omega_2 \omega_3 = 1$. Поэтому либо все три числа ω_1 , ω_2 , ω_3

имеют положительные значения, либо два из них имеют отрицательные значения, а третье положительное. Эти значения не меняются, если заменить x, y, z на $-x, -y, -z$, так что нет надобности фиксировать координаты точки M . Если для данной точки M все три числа $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ имеют положительные значения, то мы будем говорить, что точка принадлежит треугольнику $M_1M_2M_3$ (или лежит внутри него). Если же числа ω_2 и ω_3 имеют отрицательные, а ω_1 — положительное значение, то мы будем говорить, что точка M принадлежит треугольнику $\overline{M}_1, M_2, M_3$; аналогично определим принадлежность точки M треугольнику $M_1\overline{M}_2\overline{M}_3$ или $M_1M_2\overline{M}_3$. С точки зрения этих определений в эллиптической плоскости три точки, не лежащие на одной прямой, M_1, M_2, M_3 определяют четыре треугольника: $M_1M_2M_3(\Theta), \overline{M}_1M_2M_3(\Theta_1), M_1\overline{M}_2M_3(\Theta_2), M_1M_2\overline{M}_3(\Theta_3)$; каждая точка плоскости $\mathcal{E}_2$, не лежащая ни на одной из сторон M_1M_2, M_2M_3, M_3M_1 , принадлежит одному и только одному из них. Такие треугольники «с фиксированной внутренностью» мы будем называть кратко фиксированными.

Заметим, что нет надобности рассматривать фиксированные треугольники $\overline{M}_1\overline{M}_2\overline{M}_3, M_1\overline{M}_2\overline{M}_3, \overline{M}_1M_2\overline{M}_3, \overline{M}_1\overline{M}_2M_3$, так как они совпадают соответственно с треугольниками $M_1M_2M_3, \overline{M}_1M_2M_3, M_1\overline{M}_2M_3, M_1M_2\overline{M}_3$. Но на сфере, служащей моделью эллиптической плоскости, все восемь треугольников будут различны, причем треугольники последней четверки будут симметричны относительно центра сферы соответствующим треугольникам первой четверки.

Теперь можно однозначно определить также стороны и углы фиксированных треугольников $\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ на эллиптической плоскости. Именно, под длинами сторон треугольника Θ мы будем разумеать числа m_1, m_2, m_3 , непосредственно определяемые (в пределах от 0 до π) равенствами (31). Под длинами сторон треугольника Θ_1 будем разумеать числа

$$m'_1 = m_1, \quad m'_2 = \pi - m_2, \quad m'_3 = \pi - m_3. \quad (35_1)$$

Точно так же под длинами сторон треугольников Θ_2 и Θ_3 будем соответственно разумеать числа

$$m''_1 = \pi - m_1, \quad m''_2 = m_2, \quad m''_3 = \pi - m_3, \quad (35_2)$$

$$m'''_1 = \pi - m_1, \quad m'''_2 = \pi - m_2, \quad m'''_3 = m_3. \quad (35_3)$$

Аналогично зафиксируем значения углов. Под углами M_i треугольника Θ будем разумеать значения, непосредственно определяемые уравнениями (32). Углам M'_i, M''_i, M'''_i треугольников $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ присвоим значения:

$$M'_1 = M_1, \quad M'_2 = \pi - M_2, \quad M'_3 = \pi - M_3, \quad (36_1)$$

$$M''_1 = \pi - M_1, \quad M''_2 = M_2, \quad M''_3 = \pi - M_3, \quad (36_2)$$

$$M'''_1 = \pi - M_1, \quad M'''_2 = \pi - M_2, \quad M'''_3 = M_3. \quad (36_3)$$

Все четыре треугольника совершенно равноправны и любой из них мог бы быть принят за исходный треугольник Θ . В частности, стороны и углы каждого из четырех треугольников $\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ связаны одними и теми же тригонометрическими уравнениями. Это мы сейчас покажем.

13. Тригонометрия эллиптической плоскости. Рассмотрим сначала уравнения, связывающие стороны и углы треугольника $M_1M_2M_3$. Согласно формулам (33) и (34)

$$\frac{\sin m_1}{\sin M_1} = \frac{\sin m_2}{\sin M_2} = \frac{\sin m_3}{\sin M_3}. \quad (37)$$

Эти два равенства составляют так называемую теорему синусов.

Теперь составим определитель

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 \\ \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 & \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 \end{vmatrix}. \quad (38)$$

Согласно формулам (31) он равен

$$\cos m_3 - \cos m_1 \cos m_2.$$

Но по «обобщенной теореме умножения детерминантов» этот определитель равен также

$$-A_1A_2 - B_1B_2 - C_1C_2, \quad (39)$$

где согласно рубр. 11

$$A_1 = \begin{vmatrix} \beta_2\gamma_2 \\ \beta_3\gamma_3 \end{vmatrix}, \quad A_2 = -\begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1 \\ \beta_3\gamma_3 \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1 \\ \beta_2\gamma_2 \end{vmatrix} \text{ и т. д. } ^1).$$

В силу последнего равенства (32) и равенства (33) мы получаем в результате:

$$\cos m_3 - \cos m_1 \cos m_2 = \sin m_1 \sin m_2 \cos M_3. \quad (40_1)$$

Таким же образом получим:

$$\cos m_1 - \cos m_2 \cos m_3 = \sin m_2 \sin m_3 \cos M_1, \quad (40_2)$$

$$\cos m_2 - \cos m_3 \cos m_1 = \sin m_3 \sin m_1 \cos M_2. \quad (40_3)$$

Но из уравнений (37) и (40) разворачивается вся сферическая тригонометрия²⁾, а вместе с тем вся эллиптическая тригонометрия треугольника.

В частности, в эллиптической плоскости для каждого треугольника $M_1M_2M_3$ остается в силе так называемая теорема косинусов³⁾ сферической тригонометрии:

$$\left. \begin{aligned} \cos M_1 + \cos M_2 \cos M_3 &= \sin M_2 \sin M_3 \cos m_1, \\ \cos M_2 + \cos M_3 \cos M_1 &= \sin M_3 \sin M_1 \cos m_2, \\ \cos M_3 + \cos M_1 \cos M_2 &= \sin M_1 \sin M_2 \cos m_3. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Все эти формулы выведены только для треугольника Θ ; однако очень легко обнаружить, что они остаются в силе и для треугольников Θ_1 , Θ_2 , Θ_3 .

¹⁾ См., например, А. К. Сушкевич, Основы высшей алгебры, М.—Л., ОНТИ, 1937, § 38. Роль матриц A и B играют у нас $\begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$. Впрочем, в нашем элементарном случае совпадение (38) и (39) можно проверить и непосредственной выкладкой.

²⁾ См., например, В. К. Венцель, Сферическая тригонометрия, М., 1940 §§ 9 и 10.

³⁾ Впрочем, теоремой косинусов называют также и формулы (40).

В самом деле, равенства (35₁) и (36₁) можно написать в виде:

$$\begin{aligned} m_1 &= m'_1, \quad m_2 = \pi - m'_2, \quad m_3 = \pi - m'_3; \\ M_1 &= M'_1, \quad M_2 = \pi - M'_2, \quad M_3 = \pi - M'_3. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения вместо m_1, m_2, m_3 и M_1, M_2, M_3 в уравнения (40) и (41), убедимся, что стороны и углы треугольника Θ_1 связаны такими же уравнениями, как и стороны и углы треугольника Θ .

Итак, трем точкам эллиптической плоскости отвечают четыре треугольника (каждый «с фиксированной внутренностью»). Стороны и углы каждого из них связаны уравнениями, которые совпадают с уравнениями сферической тригонометрии в евклидовом пространстве.

В частности, в прямоугольных треугольниках $M_1 M_2 M_3$ с прямым углом при вершине M_1 катеты m_2 и m_3 связаны с гипотенузой m_1 уравнением

$$\cos m_1 = \cos m_2 \cos m_3. \quad (42)$$

Это есть условие, необходимое и достаточное для того, чтобы треугольник $M_1 M_2 M_3$ имел при вершине M_1 прямой угол.

14. Угловой избыток и площадь треугольника. Воспользуемся формулами (41). В последней из них $\cos m_3$ во всяком случае меньше 1, а потому

$$\sin M_1 \sin M_2 > \cos M_3 + \cos M_1 \cos M_2,$$

или иначе

$$\cos M_3 + \cos (M_1 + M_2) < 0,$$

т. е.

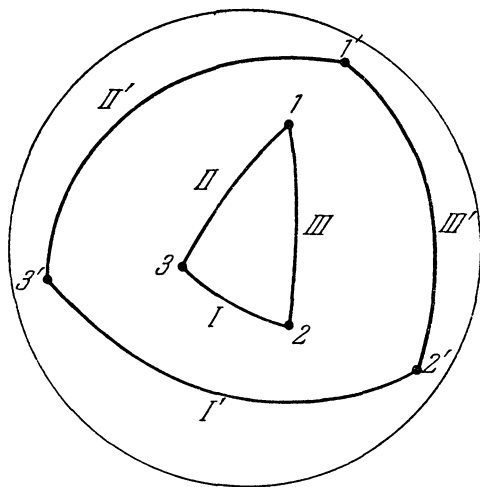
$$\cos \frac{M_1 + M_2 + M_3}{2} \cos \frac{M_1 + M_2 - M_3}{2} < 0.$$

Это неравенство имеет место, какой бы из трех углов мы ни взяли за M_3 . Возьмем за M_3 наибольший из углов M_1, M_2, M_3 . Тогда $|M_1 + M_2 - M_3| < \pi$, а потому в левой части предыдущего неравенства второй множитель имеет положительное значение. Поэтому

$$\cos \frac{M_1 + M_2 + M_3}{2} < 0, \quad \text{т. е. } M_1 + M_2 + M_3 > \pi.$$

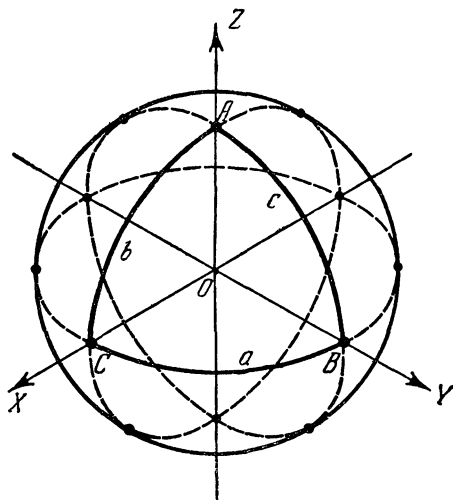
Так как в каждом из дополнительных треугольников остаются в силе тригонометрические уравнения (40) и (41), то в эллиптической плоскости так же, как и на евклидовой сфере, сумма внутренних углов треугольника всегда больше π . Разность $M_1 + M_2 + M_3 - \pi$ называется угловым избытком треугольника. Площадь треугольника пропорциональна его угловому избытку. Это доказывается так же, как на евклидовой сфере, или аналогично тому, как проведено соответствующее доказательство на гиперболической плоскости в рубр. 3 § 41. При надлежащем выборе единицы площади площадь треугольника выражается его угловым избытком. Так как треугольники $\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ не покрывают друг друга (т. е. не имеют общих внутренних точек) и каждая точка в $\mathcal{E}_2$ принадлежит одному из них, то сумма площадей всех этих четырех треугольников равна 2π . В самом деле, площадь сферы в евклидовом пространстве в соответствующих единицах (когда за единицу длины принимается радиус) выражается числом 4π . Но эллиптическая плоскость отображается на половину сферы. Поэтому ее площадь и выражается числом 2π .

15. Взаимно полярные треугольники. Положим, что мы имеем два треугольника (черт. 77): один с вершинами $1, 2, 3$ и противолежащими им сторонами I, II, III , другой с вершинами $1', 2', 3'$ и противолежащими сторонами I', II', III' . Положим, что вершины первого треугольника служат полюсами соответствующих сторон второго треугольника: точка 1 есть полюс прямой I' , точка 2 — полюс прямой II' , точка 3 — полюс стороны III' . Поскольку прямая II проходит через точку 1 , полюс прямой II лежит на поляре точки 1 , т. е. на прямой I' . Вместе с тем и полюс прямой III лежит на прямой I' . Таким же образом полюсы прямых III и I лежат на прямой II' , полюсы прямых I и II лежат на прямой III' . Итак, полюс прямой I лежит на прямых II' и III' , а следовательно, совпадает с точкой $1'$; полюс прямой II совпадает с точкой $2'$, полюс прямой III совпадает с точкой $3'$. Оказывается, что в нашем случае вершины каждого треугольника служат полюсами соответствующих сторон другого треугольника. Такие два треугольника называются взаимно полярными.



Черт. 77.

Два взаимно полярных треугольника могут совпадать (черт. 78); это имеет место, если все три вершины треугольника совпадают с полюсами его сторон. Такой треугольник называют автополярным. Автополярный треугольник можно получить следующим образом. Пусть A произвольная точка, a — ее поляр. На последней берем две взаимно полярные точки B и C (т. е. отстоящие одна от другой на расстоянии $\frac{\pi}{2}$); ABC есть автополярный треугольник; все его углы прямые.



Черт. 78.

Теорема Шаля. В двух различных взаимно полярных треугольниках прямые, соединяющие соответственные вершины, пересекаются в одной точке.

Доказательство. Вершины одного из этих треугольников (черт. 79) обозначим, как выше, через $1, 2, 3$, его стороны — через I, II, III . Координаты точек $1, 2, 3$ обозначим через $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i=1, 2, 3$). Те же координаты будут соответственно иметь прямые I', II', III' . Точка $1'$ лежит в пересечении

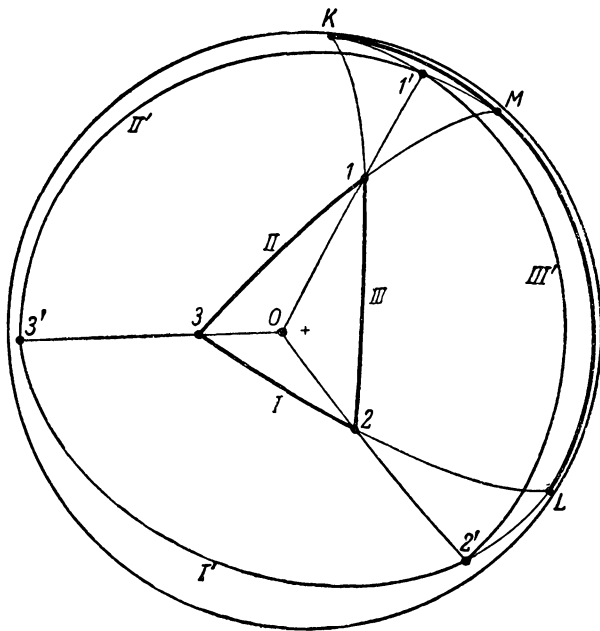
через $1, 2, 3$, его стороны — через I, II, III . Координаты точек $1, 2, 3$ обозначим через $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i=1, 2, 3$). Те же координаты будут соответственно иметь прямые I', II', III' . Точка $1'$ лежит в пересечении

прямых II' и III' ; ее координаты x, y, z удовлетворяют поэтому уравнениям:

$$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = 0,$$

$$\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = 0$$

и, следовательно, пропорциональны алгебраическим дополнениям A_1, B_1, C_1 определителя (26). Таким же образом координаты точек $2'$ и $3'$ соответственно пропорциональны алгебраическим дополнениям A_2, B_2, C_2



Черт. 79.

и A_3, B_3, C_3 того же определителя. Поэтому прямая II' имеет уравнение

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0. \quad (43)$$

Ее координаты $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1$ пропорциональны числам

$$\beta_1 C_1 - \gamma_1 B_1, \quad \gamma_1 A_1 - \alpha_1 C_1, \quad \alpha_1 B_1 - \beta_1 A_1.$$

Координаты $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2$ и $\mathfrak{A}_3, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{C}_3$ соответственно прямых $22'$ и $33'$ пропорциональны числам

$$\begin{aligned} &\beta_2 C_2 - \gamma_2 B_2, \quad \gamma_2 A_2 - \alpha_2 C_2, \quad \alpha_2 B_2 - \beta_2 A_2, \\ &\beta_3 C_3 - \gamma_3 B_3, \quad \gamma_3 A_3 - \alpha_3 C_3, \quad \alpha_3 B_3 - \beta_3 A_3. \end{aligned}$$

Вследствие этого определитель

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{C}_1 \\ \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{B}_2 & \mathfrak{C}_2 \\ \mathfrak{A}_3 & \mathfrak{B}_3 & \mathfrak{C}_3 \end{vmatrix} \quad (44)$$

равен нулю. Действительно, прибавим к членам первой горизонтали члены второй и третьей горизонталей (считая для простоты, что элементы определителя просто равны вышевыписанным выражениям¹⁾). Тогда

$$\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 = (\beta_1 C_1 + \beta_2 C_2 + \beta_3 C_3) - (\gamma_1 B_1 + \gamma_2 B_2 + \gamma_3 B_3);$$

оба члена этой разности равны нулю, так что получаем:

$$\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 = 0$$

и аналогично

$$\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}_3 = 0, \quad \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3 = 0.$$

Вместе с тем равен нулю и определитель (44); это и означает, что прямые $11'$, $22'$, $33'$ пересекаются в одной точке O (см. черт. 79).

Совершенно аналогичным путем получим, что точки пересечения соответствующих сторон взаимно полярных треугольников лежат на одной прямой (см. черт. 79).

Заметим, что стороны полярного треугольника равны внешним углам при соответствующих вершинах данного треугольника, равно как и обратно (если для «фиксированного» треугольника 123 взять подходящий «фиксированный» треугольник $1'2'3'$).

16. Бельтрамиевы координаты в эллиптической плоскости. Координаты x, y, z , связанные уравнением (1), мы называли нормальными координатами точки эллиптической плоскости; ясно, что они совпадают с надлежащим образом выбранными ортогональными декартовыми координатами одной из тех двух противоположных точек сферы, совокупность которых мы рассматриваем как точку эллиптической плоскости. Но на последней можно, конечно, устанавливать различные другие системы координат. Когда мы определяли бельтрамиевы координаты на сфере (см. § 58), то было указано, что бельтрамиевы координаты (будем их здесь обозначать через $\bar{x}, \bar{y}$) определяют не одну точку сферы, а две противоположные ее точки. Это обусловливается тем, что $\bar{x}, \bar{y}$ суть декартовы координаты проекции двух противоположных точек сферы из центра на касательную плоскость в полюсе сферы (черт. 80). Таким образом бельтрамиевыми координатами на евклидову плоскость отображается, строго говоря, не сфера, а эллиптическая плоскость. Сообразно этому числа $\bar{x}, \bar{y}$ можно рассматривать как бельтрамиевы координаты точки x, y, z эллиптической плоскости. В результате нормальные координаты x, y, z точки эллиптической плоскости связаны с бельтрамиевыми ее координатами уравнениями²⁾:

$$x = \frac{\bar{x}}{\sqrt{1 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2}}, \quad y = \frac{\bar{y}}{\sqrt{1 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2}}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2}}. \quad (45)$$

Двум значениям радикалов соответствуют значения x, y, z противоположных знаков, т. е. одна и та же точка эллиптической плоскости. Вместе с тем евклидова плоскость отобразит эллиптическую плоскость взаимно однозначно, если только иметь в виду, что бесконечно удален-

¹⁾ В действительности нужно умножить еще каждую строку на соответствующий коэффициент пропорциональности; но это не нарушит равенство определителя нулю.

²⁾ См. также В. Ф. Каган [8], ч. I, § 10, стр. 109.

ция точки M, M' . Ортогональные декартовы координаты $\bar{x}, \bar{y}$ точки m в плоскости XPY служат бельтрамиевыми координатами точки M, M' . Обозначим теперь через ϑ, φ полярное расстояние и долготу точки M , как это размечено на чертеже. Тогда

$$Pm = \operatorname{tg} \vartheta, \quad \bar{x} = \operatorname{tg} \vartheta \cos \varphi, \quad \bar{y} = \operatorname{tg} \vartheta \sin \varphi. \quad (46)$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \vartheta = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}, \quad \cos \varphi = \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}}. \quad (47)$$

Дугу PM на сфере делим в точке N пополам и проектируем из центра сферы эту точку на плоскость XPY в точку n . Полярное расстояние и долгота точки N имеют значения $\frac{\vartheta}{2}$ и φ ; бельтрамиевы координаты u, v точки N имеют значения:

$$u = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \cos \varphi, \quad v = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \sin \varphi,$$

так что

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \cos \varphi = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Вместе с тем

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2}} = \frac{2 \sqrt{u^2 + v^2}}{1 - u^2 - v^2}.$$

Теперь формулы (46) принимают вид:

$$\bar{x} = \frac{2u}{1 - u^2 - v^2}, \quad \bar{y} = \frac{2v}{1 - u^2 - v^2}, \quad 1 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = \frac{(1 + u^2 + v^2)^2}{(1 - u^2 - v^2)^2}. \quad (48)$$

Нормальные же координаты точки M в силу формул (45), (48) можно написать в виде:

$$x = \frac{2u}{w}, \quad y = \frac{2v}{w}, \quad z = \frac{2}{w} - 1, \quad (49)$$

где $w = 1 + u^2 + v^2$. Таким образом числа u, v определяют точку M , а вместе с ней и диаметрально противоположную точку M' на сфере, и на них можно смотреть как на своеобразные координаты точки (M, M') на эллиптической плоскости. Однако нельзя забывать, что хотя значениями u, v точка (M, M') определяется однозначно, но обратное соответствие двузначно: та же точка (M, M') определяется и значениями:

$$u^* = -\frac{u}{u^2 + v^2}, \quad v^* = -\frac{v}{u^2 + v^2},$$

что легко проверить подстановкой в (49) (вместо точки M получится M' , но пара (M, M') останется прежней).

Квадрат элемента длины на сфере $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ следует рассматривать как основную метрическую форму эллиптической плоскости.

При этом из формул (49) получаем:

$$dx = 2 \frac{w du - u dw}{w^2}, \quad dy = 2 \frac{w dv - v dw}{w^2}, \quad dz = -2 \frac{dw}{w^2}.$$

Так как $dw = 2(u du + v dv)$, то отсюда находим:

$$ds^2 = \frac{4(du^2 + dv^2)}{(1 + u^2 + v^2)^2}.$$

Если мы заменим u и v через $\frac{1}{2} \tilde{u}$ и $\frac{1}{2} \tilde{v}$, то

$$ds^2 = \frac{d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2}{\left[1 + \frac{1}{4}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)\right]^2},$$

что при кривизне эллиптической плоскости, равной 1, совпадает с выражением Римана (§ 72, (12), стр. 152).

§ 75. НАЧАЛА ГЕОМЕТРИИ ТРЕХМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

1. Определение трехмерного эллиптического пространства. Элемент (точку) трехмерного многообразия, в котором строится эллиптическая геометрия ($\mathcal{E}_3$), можно аналитически определить четырьмя числами x, y, z, t , связанными уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1, \quad (1)$$

причем элементы (точки), определяемые числами x, y, z, t и $-x, -y, -z, -t$, не считаются различными. Часто трехмерную эллиптическую геометрию рассматривают как геометрию сферы в четырехмерном евклидовом пространстве (E_4) с отождествленными противоположными ее точками. В этой модели ее проще всего изучать. Но не следует упускать из виду, что это лишь одна интерпретация (одна модель) этой геометрии. Мы будем иметь случай указать различные другие ее модели.

Самые числа x, y, z, t , определяющие таким образом точку эллиптического пространства, обыкновенно называют нормальными ее координатами. Группа линейных преобразований

$$\left. \begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 t, \\ y' &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta_4 t, \\ z' &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \gamma_4 t, \\ t' &= \delta_1 x + \delta_2 y + \delta_3 z + \delta_4 t, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

коэффициенты которых образуют ортогональную матрицу, оставляет уравнение (1) инвариантным. Она и принимается за группу автоморфизмов этой геометрии. Если определитель этой матрицы равен 1 (ортогональная матрица первого рода), то преобразование называется движением в $\mathcal{E}_3$; если же ее определитель равен -1 (ортогональная матрица второго рода), то соответствующее преобразование называется отражением (или симметрией). Можно строить эллиптическую геометрию, в которой отражения вовсе отсутствуют, так как преобразования (2) с определителем, равным 1, сами по себе образуют группу, причем сюда входит и умножение x, y, z, t на -1 . Мы, однако, будем оставаться при общей ортогональной группе автоморфизмов.

2. Метрика трехмерного эллиптического пространства. Расстояние между двумя точками (x_1, y_1, z_1, t_1) и (x_2, y_2, z_2, t_2) в $\mathcal{E}_3$ определяется двузначно: числом ρ , для которого

$$\cos \rho = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 + t_1 t_2, \quad 0 \leq \rho \leq \pi, \quad (3)$$

и числом $\rho' = \pi - \rho$. При преобразовании (2), т. е. при движении или отражении, совокупность двух значений расстояния не меняется. Расстояние между двумя точками (x_1, y_1, z_1, t_1) и (x_2, y_2, z_2, t_2) может равняться нулю (или π) в том и только в том случае, если эти две точки совпадают, т. е. когда $x_1 = \pm x_2$, $y_1 = \pm y_2$, $z_1 = \pm z_2$, $t_1 = \pm t_2$. Точки, расстояние между которыми (оба его значения) равно $\frac{\pi}{2}$, называются взаимно полярными; таким образом условие полярности двух точек выражается уравнением

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 + t_1 t_2 = 0. \quad (4)$$

Плоскостью в эллиптическом пространстве называется геометрическое место точек, которое в нормальных координатах выражается однородным линейным уравнением

$$ax + by + cz + dt = 0. \quad (5)$$

При этом, конечно, предполагается, что коэффициенты a, b, c, d не обращаются одновременно в нуль; соответственно этому они могут быть нормированы таким образом, чтобы сумма их квадратов составляла 1; в этом случае эти коэффициенты называются координатами (нормальными) плоскости. Таким образом уравнение плоскости всегда можно представить в «приведенном» виде:

$$x + \lambda y + \mu z + \nu t = 0, \quad (6)$$

где

$$x^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1. \quad (6a)$$

Числа x, λ, μ, ν и $-x, -\lambda, -\mu, -\nu$ в качестве координат определяют ту же плоскость.

Каждые две несовпадающие плоскости пересекаются (т. е. имеют общие точки). В самом деле, уравнения этих плоскостей

$$\left. \begin{aligned} x_1 x + \lambda_1 y + \mu_1 z + \nu_1 t &= 0, \\ x_2 x + \lambda_2 y + \mu_2 z + \nu_2 t &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

во всяком случае всегда совместны; удовлетворяющие им значения (x, y, z, t) всегда могут быть нормированы так, чтобы имело место соотношение (1), т. е. чтобы они служили нормальными координатами соответствующей общей точки этих плоскостей. Говорят, что две плоскости (7) в общих точках образуют угол. Численно этот угол также определяется двузначно; именно, если $(x_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ и $(x_2, \lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ суть нормальные координаты этих плоскостей, то угол между ними в каждой общей точке определяется числами φ и φ' , для которых

$$\cos \varphi = x_1 x_2 + \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \quad \text{и} \quad \varphi' = \pi - \varphi. \quad (8)$$

Совокупность этих значений также не меняется при преобразованиях (2), т. е. при движениях и отражениях, а также при изменении знаков каждого из чисел $x_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1$ (или $x_2, \lambda_2, \mu_2, \nu_2$) на обратные.

Угол между двумя плоскостями может быть равен нулю (или π) только в том случае, когда эти плоскости совпадают.

Плоскости называются взаимно перпендикулярными, если оба значения угла, ими образуемого, равны $\frac{\pi}{2}$. Условие взаимной перпендикулярности двух плоскостей, таким образом, выражается уравнением

$$x_1x_2 + \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 = 0. \quad (9)$$

Плоскость в эллиптическом пространстве не делит пространства на две части в том смысле, как это делает плоскость в евклидовом или гиперболическом пространстве. В самом деле, такое деление в обыкновенном аналитическом его понимании в евклидовой (или гиперболической) геометрии сводится к тому, что левая часть уравнения (6) принимает в одних точках, не принадлежащих плоскости, положительное значение, а в других отрицательное; между тем в эллиптическом пространстве в одной и той же точке при ее координатах x, y, z, t оно принимает значение одного знака, а при координатах $-x, -y, -z, -t$ той же точки — значение противоположного знака. К геометрическому смыслу этого утверждения мы еще возвратимся ниже.

3. Плоскость трехмерного эллиптического пространства представляет собой двумерное эллиптическое многообразие. Чтобы это обнаружить возможно проще, заметим, что всякая плоскость трехмерного эллиптического пространства может быть движением совмещена с плоскостью $x=0$. В самом деле, положим, что данная плоскость выражается уравнением (6); ее координаты, связанные уравнением (6а), можно рассматривать как неполную ортогональную матрицу в том смысле, что ее можно дополнить до полной ортогональной матрицы

$$\begin{vmatrix} x & \lambda & \mu & \nu \\ x_1 & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ x_2 & \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ x_3 & \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix}$$

как первого, так и второго рода. Рассмотрим преобразование вида (2) с этими коэффициентами. Первое из уравнений этого преобразования выражает, что рассматриваемая плоскость (6) этим преобразованием преводится в плоскость $x=0$.

Теперь уже нетрудно видеть, что плоскость можно рассматривать как двумерное эллиптическое пространство. В самом деле, если $0, y, z, t$ есть точка этой плоскости ($x=0$), то

$$y^2 + z^2 + t^2 = 1.$$

Преобразования (2), оставляющие эту плоскость инвариантной, выражаются системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= \beta_2y + \beta_3z + \beta_4t, \\ z' &= \gamma_2y + \gamma_3z + \gamma_4t, \\ t' &= \delta_2y + \delta_3z + \delta_4t, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

коэффициенты которой образуют ортогональную матрицу. Заметим, что и в том случае, когда в геометрии трехмерного многообразия мы сохраняем одни только движения (т. е. исключаем отражения), плоскость сохраняет все движения в себе. Вместе с тем ясно, что расстояние между двумя точками плоскости в трехмерном пространстве $\mathcal{E}_3$ имеет то же двойное значение, что и в плоскости $\mathcal{E}_2$ (в двумерном эллиптическом пространстве), согласно прежнему его определению.

Координаты плоскости $(\alpha, \lambda, \mu, \nu)$, поскольку они связаны соотношением (6а), могут быть рассматриваемы как координаты некоторой точки в том же трехмерном эллиптическом пространстве; эта точка называется полюсом плоскости; ясно, что каждой плоскости соответствует один и только один полюс. Как легко себе уяснить, если некоторое движение или отражение совмещает одну плоскость с другой, то оно совмещает и полюс первой плоскости с полюсом второй; в частности, если оно оставляет плоскость в покое (совмещает ее с самой собой), то оно оставляет в покое и ее полюс. Уравнение плоскости выражает, что все ее точки отстоят на расстоянии $\frac{\pi}{2}$ от ее полюса. Плоскость называется полярной по отношению к своему полюсу; таким образом, полярная плоскость есть геометрическое место точек, отстоящих на расстоянии $\frac{\pi}{2}$ от полюса. Расстояние между полюсами двух плоскостей совпадает с углом между этими плоскостями. Если две плоскости взаимно перпендикулярны, то равенство (9) показывает, что каждая из них проходит через полюс другой.

4. Прямая в эллиптическом пространстве. Две несовпадающие плоскости в $\mathcal{E}_3$ всегда имеют бесчисленное множество общих точек (рубр. 2). Сообразно этому в $\mathcal{E}_3$ геометрическое место точек пересечения двух несовпадающих плоскостей называется прямой этого трехмерного эллиптического пространства. Прямая в $\mathcal{E}_3$ является прямой каждой плоскости, в которой она лежит, так как в этой плоскости она выражается одним (добавочным) линейным уравнением, связывающим нормальные координаты ее точек. Легко себе уяснить, что всякая прямая в $\mathcal{E}_3$ может быть совмещена с прямой $z=t=0$ ($x^2+y^2=1$). Для этого достаточно совместить плоскость, в которой лежит прямая, с плоскостью $t=0$, а затем совместить прямую с экватором, как мы это делали в $\mathcal{E}_2$.

Так как координаты точек прямой удовлетворяют трем независимым уравнениям:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1, \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 x + \lambda_1 y + \mu_1 z + \nu_1 t &= 0, \\ \alpha_2 x + \lambda_2 y + \mu_2 z + \nu_2 t &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11a)$$

то прямая представляет собой одномерный образ. Поскольку уравнения (11a) предполагаются независимыми, то они выражают прямую только в том случае, если, по крайней мере, один из определителей второго порядка матрицы

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \alpha_2 & \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

Прямая, не лежащая целиком в некоторой плоскости, всегда пересекает эту плоскость в одной и только в одной точке. В самом деле, если (11a) суть уравнения данной прямой, а

$$\kappa_3 x + \lambda_3 y + \mu_3 z + \nu_3 t = 0 \quad (11b)$$

есть уравнение плоскости, в которой эта прямая не лежит, то, по крайней мере, один из определителей третьего порядка матрицы

$$\begin{vmatrix} \kappa_1 & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \kappa_2 & \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \kappa_3 & \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля: если бы все определители третьего порядка этой матрицы были равны нулю, то последнее из уравнений (11a), (11b) было бы следствием двух других, т. е. прямая (11a) лежала бы в плоскости (11b).

Поэтому отношения некоторых трех из координат x, y, z, t к четвертой определяются из уравнений (11a) и (11b). Вместе с тем из этих уравнений определяются и значения координат общей точки (до знака).

5. Элемент длины в трехмерном эллиптическом пространстве. Элемент длины в трехмерном эллиптическом пространстве выражается в нормальных координатах совершенно аналогично тому, как и в эллиптической плоскости (§ 74, (7)). Если его обозначить через $d\rho$, так что с обычным приближением

$$\begin{aligned} \cos d\rho &= 1 - \frac{d\sigma^2}{2} = x(x+dx) + y(y+dy) + z(z+dz) + t(t+dt) = \\ &= 1 + (x dx + y dy + z dz + t dt). \end{aligned}$$

Но вместе с тем

$$(x+dx)^2 + (y+dy)^2 + (z+dz)^2 + (t+dt)^2 = 1,$$

а потому

$$d\rho^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2.$$

Это и естественно, так как $d\rho^2$ есть элемент длины в четырехмерном евклидовом пространстве.

6. Геодезическое отображение трехмерного эллиптического пространства на евклидово. Подобно тому как двумерное эллиптическое пространство допускает указанное Бельтрами однозначное отображение на евклидову плоскость, трехмерное эллиптическое пространство допускает аналогичное однозначное отображение на трехмерное евклидово пространство E_3 , если учитывать и бесконечно удаленные его точки. Это отображение осуществляется следующим образом. Если X, Y, Z суть ортогональные декартовы координаты точки евклидова пространства, соответствующей точке x, y, z, t эллиптического пространства, то полагаем:

$$x = \frac{X}{W}, \quad y = \frac{Y}{W}, \quad z = \frac{Z}{W}, \quad t = \frac{1}{W}, \quad (12a)$$

где

$$W^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 1 \quad (12b)$$

(двойное значение радикала W соответствует двойным знакам координат x, y, z, t). Обратно

$$X = \frac{x}{t}, \quad Y = \frac{y}{t}, \quad Z = \frac{z}{t}. \quad (13)$$

При $t=0$ мы получаем бесконечно удаленную точку E_3 , определяемую отношениями $x:y:z$. Можно сказать, что плоскости $t=0$ при этом отвечает бесконечно удаленная плоскость пространства E_3 .

Наше отображение геодезическое, т. е. прямым эллиптического пространства отвечают прямые же евклидова пространства и обратно. Действительно, если

$$\left. \begin{aligned} \kappa x + \lambda y + \mu z + \nu t &= 0, \\ \kappa_1 x + \lambda_1 y + \mu_1 z + \nu_1 t &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

суть уравнения эллиптической прямой, то

$$\left. \begin{aligned} \kappa X + \lambda Y + \mu Z + \nu &= 0, \\ \kappa_1 X + \lambda_1 Y + \mu_1 Z + \nu_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14a)$$

суть уравнения образа этой прямой. Они выражают прямую E_3 . Обратное утверждение доказывается точно так же.

Если уравнение плоскости в эллиптическом пространстве в приведенном виде есть

$$\kappa x + \lambda y + \mu z + \nu t = 0, \quad \kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \quad (15)$$

то уравнение ее изображения в евклидовом пространстве есть

$$\kappa X + \lambda Y + \mu Z + \nu = 0. \quad (15a)$$

Полнос этой плоскости в отображении имеет координаты

$$\bar{\kappa} = \frac{\kappa}{\nu}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\nu}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\nu}. \quad (16)$$

Это — бесконечно удаленная точка, если плоскость (15) проходит через начало координат.

7. Уравнения прямой в эллиптическом пространстве, проходящей через две данные точки. Через каждые две точки в E_3 проходит одна и только одна прямая; то же имеет место в $\mathcal{E}_3$. Составим уравнение прямой, проходящей в $\mathcal{E}_3$ через две различные точки: $M_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$, в специальной форме, наиболее удобной в приложениях. Так как координаты точек M_0 и M_1 должны удовлетворять уравнениям вида (11a), то общее решение этой системы уравнений выразится формулами:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 v + x_1 w, \\ y &= y_0 v + y_1 w, \\ z &= z_0 v + z_1 w, \\ t &= t_0 v + t_1 w, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где v, w — пока произвольные числа. Условие нормировки (11) дает

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = v^2 + w^2 + 2vw(x_0 x_1 + y_0 y_1 + z_0 z_1 + t_0 t_1) = 1,$$

т. е.

$$v^2 + w^2 + 2vw \cos \rho = 1, \quad (18)$$

где ρ — одно из значений расстояния между точками M_0, M_1 в $\mathcal{E}_3$, именно,

определяемое равенством (3). Замена одного значения ρ вторым ($\rho' = \pi - \rho$) происходит при замене x_1, y_1, z_1, t_1 на $-x_1, -y_1, -z_1, -t_1$ (или x_0, y_0, z_0, t_0 на $-x_0, -y_0, -z_0, -t_0$). Если же заменить x_0, y_0, z_0, t_0 на $-x_0, -y_0, -z_0, -t_0$ и в то же время x_1, y_1, z_1, t_1 на $-x_1, -y_1, -z_1, -t_1$, то ρ не меняется.

Итак, уравнения (17) при связи (18) между параметрами u, v суть параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $M_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ в $\mathcal{E}_3^1$. От параметрических уравнений (17) нетрудно перейти к двум линейным уравнениям прямой в нормальных координатах. Действительно, так как точки $M_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ различны, то все определители второго порядка матрицы

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & t_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \end{vmatrix}$$

не могут обращаться одновременно в нуль. Пусть, для определенности, $x_0 y_1 - x_1 y_0 \neq 0$. Из первых двух уравнений (17), присоединяя к ним поочередно третье и четвертое, получим:

$$\begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 \\ y & y_0 & y_1 \\ z & z_0 & z_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 \\ y & y_0 & y_1 \\ t & t_0 & t_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

Эти два уравнения, ни одно из которых не обращается в тождество и которые независимы между собой, выражают прямую, проходящую через точки M_0 и M_1 .

Как видно, из тех же уравнений (17), для того чтобы три точки $M(x, y, z, t)$, $M_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы все определители третьего порядка матрицы

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & t_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} \quad (20)$$

были равны нулю. Конечно, из полученных четырех уравнений лишь два будут независимыми, как, например, уравнения (19) в случае $x_0 y_1 - x_1 y_0 \neq 0$ (это условие обеспечивает, что z фактически входит в первое уравнение и t — во второе). Остальные два уравнения будут следствием этих двух.

Отметим также, что плоскость, проходящая через точки M_0, M_1, M_2 , не лежащие на одной прямой, выражается уравнением

$$\begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 & x_2 \\ y & y_0 & y_1 & y_2 \\ z & z_0 & z_1 & z_2 \\ t & t_0 & t_1 & t_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (21)$$

¹⁾ Иногда прямая в $\mathcal{E}_3$ определяется этой параметрической формулой ее задания. Это может представлять и то преимущество, что эта форма уравнений прямой непосредственно обобщается на эллиптическое пространство какого угодно числа измерений.

Действительно, это линейное уравнение, которому удовлетворяют координаты точек M_0, M_1, M_2 . Обращение этого уравнения в тождество исключено тем, что M_0, M_1, M_2 не лежат на одной прямой, т. е. матрица

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \\ t_0 & t_1 & t_2 \end{vmatrix} \quad (22)$$

имеет ранг 3. Плоскость (21), конечно, единственная плоскость, проходящая через данные три точки.

В самом деле, если плоскость

$$\lambda x + \mu y + \nu z + \tau t = 0$$

проходит через точки M_0, M_1, M_2 , то

$$\begin{aligned} \lambda x_0 + \mu y_0 + \nu z_0 + \tau t_0 &= 0, \\ \lambda x_1 + \mu y_1 + \nu z_1 + \tau t_1 &= 0, \\ \lambda x_2 + \mu y_2 + \nu z_2 + \tau t_2 &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку все определители третьего порядка матрицы (22) не обращаются одновременно в нуль, коэффициенты λ, μ, ν, τ нашего уравнения пропорциональны определителям третьего порядка этой матрицы, т. е. коэффициентам уравнения (21).

Уравнения прямой в виде (17) отчетливо обнаруживают, что плоскость, которой принадлежат две точки M_0 и M_1 , содержит все точки, соединяющей их прямой M_0M_1 . Из доказанных фактов очевидным образом вытекает, что через точку и прямую, ее не содержащую, как и через две пересекающиеся прямые, проходит плоскость и притом только одна.

8. Опорные точки координации прямой. Если для определения прямой возьмем две взаимно полярные точки $M_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$, то уравнение (18) примет вид:

$$v^2 + w^2 = 1. \quad (23)$$

В этом случае можно положить $v = \cos \alpha$, $w = \sin \alpha$, где $-\pi < \alpha \leq \pi$. Вместе с тем уравнения (17) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 \cos \alpha + x_1 \sin \alpha, \\ y &= y_0 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha, \\ z &= z_0 \cos \alpha + z_1 \sin \alpha, \\ t &= t_0 \cos \alpha + t_1 \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Заметим, что на каждой прямой существует одна и только одна точка M_1 , полярная данной точке M_0 , т. е. отстоящая от нее на расстоянии $\frac{\pi}{2}$.

В самом деле, это есть точка пересечения этой прямой с плоскостью, полярной точке M_0 (пубр. 4).

Две взаимно полярные точки прямой M_0, M_1 , при помощи которых мы будем выражать каждую точку этой прямой уравнениями (24), мы будем называть опорными точками и этой координации на прямой.

В связи с этим очень важно отметить, что на каждой прямой, проходящей через точку M_0 , существуют две различные точки N ,

отстоящие от M_0 на данном расстоянии $\rho \neq \frac{\pi}{2}$, т. е. такие, что одно из значений расстояния M_0N равно ρ . Действительно, если координаты x, y, z, t выражают точку N относительно опорных точек M_0 и M_1 равенствами (24), то для требуемой точки N

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 + tt_0 = \cos \rho.$$

Но из (24) следует (учитывая, что $x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 + t_0t_1 = 0$)

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 + tt_0 = \cos \alpha.$$

Отсюда $\alpha = \pm \rho$, и координаты двух точек $N(N_1$ и $N_2)$ суть:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 \cos \rho \pm x_1 \sin \rho, \\ y &= y_0 \cos \rho \pm y_1 \sin \rho, \\ z &= z_0 \cos \rho \pm z_1 \sin \rho, \\ t &= t_0 \cos \rho \pm t_1 \sin \rho. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

При ρ , не равном $\frac{\pi}{2}$, это две различные точки. Если заменить ρ на $\pi - \rho$, то получим те же две точки N_1, N_2 .

9. Прямолинейное расположение полюсов плоскостей, пересекающихся по общей прямой. Отметим прежде всего следующее вспомогательное предложение. Для того чтобы три точки (x, y, z, t) , (x_1, y_1, z_1, t_1) , (x_2, y_2, z_2, t_2) были расположены на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы их координаты были связаны линейными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} a_1x + a_2x_1 + a_3x_2 &= 0, \\ a_1y + a_2y_1 + a_3y_2 &= 0, \\ a_1z + a_2z_1 + a_3z_2 &= 0, \\ a_1t + a_2t_1 + a_3t_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

в которых коэффициенты a_1, a_2, a_3 не равны одновременно нулю. Необходимость этого условия вытекает из предыдущего, так как уравнения (17) имеют именно этот вид. Обратно, если в уравнениях (26), например, $a_1 \neq 0$, то они приводятся к виду (17); уже как следствие этого коэффициенты v и w будут связаны соотношением (18).

Перейдем теперь к нашей теме.

Теорема. Если три плоскости проходят через одну прямую, то их полюсы лежат на одной прямой, и обратно, если полюсы трех плоскостей лежат на одной прямой, то эти плоскости также пересекаются по одной прямой.

Пусть уравнения трех плоскостей с приведенными коэффициентами будут:

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1x + \lambda_1y + \mu_1z + \nu_1t &= 0, \\ \kappa_2x + \lambda_2y + \mu_2z + \nu_2t &= 0, \\ \kappa_3x + \lambda_3y + \mu_3z + \nu_3t &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

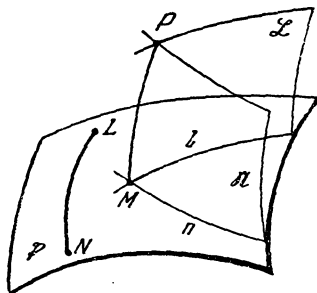
Если эти три плоскости проходят через одну прямую, например через прямую, выражаемую первыми двумя уравнениями, то это значит, что

третье уравнение линейно связано с двумя первыми, т. е. существуют три такие числа a_1, a_2, a_3 , где $a_3 \neq 0$, что

$$\left. \begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= 0, \\ a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 &= 0, \\ a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + a_3\mu_3 &= 0, \\ a_1\nu_1 + a_2\nu_2 + a_3\nu_3 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

но это означает, что полюсы этих плоскостей лежат на одной прямой. Обратно, если полюсы $(x_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $(x_2, \lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, $(x_3, \lambda_3, \mu_3, \nu_3)$ трех плоскостей (27) лежат на одной прямой, то их координаты связаны уравнениями вида (28), а это означает, что плоскости (27) имеют общую прямую.

10. Угол между двумя пересекающимися прямыми в эллиптическом пространстве. Если две прямые l и n в $\mathcal{E}_3$ имеют общую точку M (черт. 81), то они лежат в одной плоскости $\mathfrak{P}$, определяемой этими прямыми. Пусть P будет полюс этой плоскости, $\mathcal{L}$ и $\mathcal{N}$ — две плоскости, проходящие через точку P и содержащие соответственно прямые l и n ; пусть L и N будут полюсы этих плоскостей. Расстояние между этими полюсами L и N будем называть углом между прямыми l и n (в точке их пересечения M). Угол, таким образом, как обычно, определен двузачно; если оба значения равны $\frac{\pi}{2}$, то прямые называются взаимно перпендикулярными.



Черт. 81.

Так как плоскость $\mathcal{L}$ проходит через точку P , то ее полюс L лежит в плоскости $\mathfrak{P}$, полярной относительно точки P ; вместе с тем расстояние точки L от каждой точки прямой l равно $\frac{\pi}{2}$. Таким образом L есть та точка, которая согласно определению, данному в предыдущем параграфе (руб. 4), есть полюс прямой l в плоскости $\mathfrak{P}$. По тем же соображениям и точка N есть полюс прямой n в той же плоскости $\mathfrak{P}$. Таким образом угол между двумя пересекающимися прямыми в $\mathcal{E}_3$ совпадает с углом, который они образуют в плоскости $\mathcal{E}_2$ этих двух прямых (§ 74, руб. 8). Пересекающиеся прямые взаимно перпендикулярны в $\mathcal{E}_3$, если они взаимно перпендикулярны в плоскости, в которой они лежат.

11. Взаимно полярные прямые в эллиптическом пространстве. Теорему, доказанную в руб. 9, можно формулировать так: если точка M лежит на прямой M_1M_2 , то ее полярная плоскость $\mathfrak{M}$ проходит через прямую пересечения полярных плоскостей $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ точек M_1 и M_2 . Еще иначе: полярные плоскости всех точек прямой M_1M_2 пересекаются по другой прямой N_1N_2 . В этом случае говорят, что прямая N_1N_2 полярна прямой M_1M_2 . Очевидно, полярность N_1N_2 прямой M_1M_2 равносильна тому, что каждая точка прямой N_1N_2 отстоит от каждой точки прямой M_1M_2 на расстоянии $\frac{\pi}{2}$. Отсюда видно, что полярность

прямых есть свойство взаимное, и если $N_1 N_2$ полярна $M_1 M_2$, то и $M_1 M_2$ полярна $N_1 N_2$. Каждое движение или отражение в $\mathcal{E}_3$, совмещающее прямую $M_1 M_2$ с прямой $M'_1 M'_2$, совмещает прямую, полярную прямой $M_1 M_2$, с прямой, полярной прямой $M'_1 M'_2$. Это вытекает из сохранения расстояния при движениях, в частности, из сохранения постоянного расстояния $\frac{\pi}{2}$ между взаимно полярными прямыми. В частности, если некоторое движение оставляет прямую $M_1 M_2$ в покое (т. е. совмещает ее с самою собою), то оно оставляет в покое и полярную ей прямую.

Нетрудно также найти уравнения прямой, полярной данной. Если данная прямая имеет уравнения:

$$\left. \begin{aligned} x_1 x + \lambda_1 y + \mu_1 z + \nu_1 t &= 0, \\ x_2 x + \lambda_2 y + \mu_2 z + \nu_2 t &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

то, по крайней мере, один из определителей второго порядка матрицы коэффициентов должен быть отличен от нуля. Если отличен от нуля определитель $\kappa_1 \lambda_2 - \kappa_2 \lambda_1$, то уравнения полярной прямой будут:

$$\left| \begin{array}{ccc} \kappa_1 & \lambda_1 & \mu_1 \\ \kappa_2 & \lambda_2 & \mu_2 \\ x & y & z \end{array} \right| = 0, \quad \left| \begin{array}{ccc} \kappa_1 & \lambda_1 & \nu_1 \\ \kappa_2 & \lambda_2 & \nu_2 \\ x & y & t \end{array} \right| = 0. \quad (30)$$

Действительно, сравнивая уравнения (30) с (19), замечаем, что они выражают прямую, проходящую через точки $(x_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ и $(x_2, \lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, т. е. через полюсы плоскостей (29). Тем самым прямая (30) есть полярная прямой пересечения плоскостей (29). В частности, если исходная прямая есть $x=0, y=0$, то полярная ей прямая есть $z=0, t=0$. Неопосредственно ясно, что расстояние любой точки первой из этих прямых от любой точки второй равно $\frac{\pi}{2}$.

12. Обзор важнейших движений в $\mathcal{E}_3$. В эллиптическом пространстве точка $O(0, 0, 0, 1)$ может быть совмещена с любой другой точкой (x_0, y_0, z_0, t_0) . В самом деле, преобразование (2) выполняет это совмещение, если $\alpha_4 = x_0, \beta_4 = y_0, \gamma_4 = z_0, \delta_4 = t_0$. Но числа x_0, y_0, z_0, t_0 образуют неполную ортогональную матрицу, а таковую всегда можно дополнить до ортогональной матрицы как одного, так и другого рода. Ясно, что и обратно, любую точку можно привести в точку $O(0, 0, 0, 1)$ как движением, так и отражением. Обычными комбинациями преобразований легко показать, что любую точку в $\mathcal{E}_3$ можно привести в совмещение с любой другой точкой пространства¹⁾.

Существуют движения и отражения, оставляющие любую данную точку в покое, т. е. существуют различные вращения вокруг любой данной точки. Действительно, вращением вокруг точки $O(0, 0, 0, 1)$ можно полярную ей точку $O_1(0, 0, 1, 0)$ привести в любую другую полярную ей точку $O'_1(x'_1, y'_1, z'_1, t'_1)$. В самом деле, преобразование (2) оставляет точку O в покое и приводит точку O_1 в точку O'_1 , если

$$\left. \begin{aligned} \alpha_4 &= \beta_4 = \gamma_4 = 0, & \delta_4 &= 1, \\ \alpha_3 &= x'_1, & \beta_3 &= y'_1, & \gamma_3 &= z'_1, & \delta_3 &= t'_1. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

¹⁾ Если преобразование S_0 переводит точку M_0 в точку O , а преобразование S_1 переводит точку O в точку M_1 , то преобразование $S_1 S_0$ переводит точку M_0 в M_1 .

Однако если точка O'_1 полярна точке O , то числа

$$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3, \\ \alpha_4, \beta_4, \gamma_4, \delta_4$$

образуют неполную ортогональную матрицу, а потому могут быть дополнены до ортогональной матрицы как первого, так и второго рода. Иначе говоря, вращением вокруг точки O можно точку O'_1 привести в точку O'_1 как движением, так и отражением. Обычными комбинациями преобразований отсюда выведем, что любые две взаимно полярные точки могут быть приведены в совмещение с любыми двумя взаимно полярными точками как движениями, так и отражениями. Отсюда следует также, что любая прямая может быть приведена в совмещение с любой другой прямой и притом так, что любая наперед заданная точка первой прямой совместится с любой наперед заданной точкой другой прямой. В частности, существуют движения и отражения, оставляющие данную прямую в покое, т. е. совмещающие ее с самой собой. Движения и отражения этого рода исследуем более подробно.

13. Обзор движений и отражений в $\mathcal{E}_3$, оставляющих в покое некоторую прямую. Взаимно полярные прямые $x=0$, $y=0$ и $z=0$, $t=0$ мы будем называть временно главными осями соответственно первой и второй. Если какое-либо движение или отражение оставляет в покое одну из них, то оно оставляет в покое и другую. Изучим подробнее движение и отражение, оставляющие эти оси в покое.

Если преобразование (2) оставляет в покое ось $x=0$, $y=0$, то $\alpha_3=\alpha_4=\beta_3=\beta_4=0$. Так как

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = 1, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2 = 1, \quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4 = 0,$$

то в рассматриваемом случае

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1, \quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0,$$

т. е. матрица

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

является ортогональной. Отсюда следует

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1, \quad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0.$$

Так как, с другой стороны,

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + \delta_1^2 = 1, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 + \delta_2^2 = 1,$$

то отсюда следует, что

$$\gamma_1^2 + \delta_1^2 = \gamma_2^2 + \delta_2^2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \delta_1 = \delta_2 = 0,$$

а так как

$$\gamma_1\delta_1 + \gamma_2\delta_2 + \gamma_3\delta_3 + \gamma_4\delta_4 = 0, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 + \gamma_4^2 = 1, \quad \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 = 1,$$

то

$$\gamma_3\delta_3 + \gamma_4\delta_4 = 0, \quad \gamma_3^2 + \gamma_4^2 = 1, \quad \delta_3^2 + \delta_4^2 = 1.$$

Матрица коэффициентов преобразования (2) в этом случае имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ 0 & 0 & \delta_3 & \delta_4 \end{vmatrix} \quad (32)$$

т. е. как бы составлена из двух ортогональных матриц

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_3 & \delta_4 \end{vmatrix}, \quad (33_1)$$

а ее определитель равен произведению соответствующих определителей

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_3 & \delta_4 \end{vmatrix}. \quad (33_2)$$

Самое преобразование (2) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \alpha_2 y, \\ y' &= \beta_1 x + \beta_2 y, \\ z' &= \gamma_3 z + \gamma_4 t, \\ t' &= \delta_3 z + \delta_4 t, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

откуда снова видно, что оно оставляет в покое обе главные оси. Так как матрицы (33₁) ортогональны, то их можно представить в виде:

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \mp \sin \alpha & \pm \cos \alpha \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \mp \sin \beta & \pm \cos \beta \end{vmatrix},$$

причем верхние знаки имеют место, когда соответствующая ортогональная матрица первого рода, а нижние знаки имеют место, когда она второго рода. Теперь расстояние ρ между точкой первой оси $(0, 0, z, t)$ в первоначальном положении и в ее смещенном положении $(0, 0, z', t')$ определяется равенством

$$\cos \rho = zz' + tt' = \gamma_3 z^2 + (\gamma_4 + \delta_3) zt + \delta_4 t^2.$$

Если вторая матрица (33₁) первого рода, то

$$\gamma_3 = \delta_4 = \cos \beta, \quad \gamma_4 = -\delta_3 = \sin \beta;$$

вместе с тем $\cos \rho = \cos \beta$. Все точки первой оси смещаются на одно и то же расстояние β , $\pi - \beta$. При $\beta = 0$ $z' = z$, $t' = t$, т. е. все точки первой оси остаются в покое.

Если же вторая матрица (33₁) есть ортогональная матрица второго рода, то

$$\gamma_3 = -\delta_4 = \cos \beta, \quad \gamma_4 = \delta_3 = \sin \beta,$$

а вместе с тем

$$\cos \rho = (z^2 - t^2) \cdot \cos \beta + 2zt \cdot \sin \beta.$$

В этом случае различные точки оси $x = 0$, $y = 0$ смещаются на различные расстояния. При этом точка M_0

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \pm \cos \frac{\beta}{2}, \quad t = \pm \sin \frac{\beta}{2}$$

остается в покое; мы получаем отражение точек этой оси от точки M_0 .

Вполне аналогично происходит смещение и на второй оси. Если преобразование (34) в $\mathcal{E}_3$ есть движение, то оно связано либо со скольжением обеих осей, либо с отражением каждой из них.

Движение в $\mathcal{E}_3$, оставляющее в покое все точки первой оси, мы условимся называть вращением около первой оси и в то же время скольжением вдоль полярной ей второй оси.

Действительно, в этом случае первая из матриц (33₁) будет ортогональной матрицей первого рода¹⁾, что связано со смещением всех точек второй оси на одно и то же расстояние вдоль нее.

Обычными приемами наши результаты распространяются на преобразования, оставляющие в покое любые две взаимно полярные прямые. Чтобы отчетливо формулировать эти результаты, мы несколько расширим терминологию. Именно, всякое движение в $\mathcal{E}_3$, переводящее прямую в себя, но не в результате ее отражения около одной из ее точек, будем называть поворотом вокруг этой прямой. Поворот может представлять собой скольжение по прямой или вращение вокруг нее, или вращение вокруг этой прямой одновременно со скольжением по ней. Всякое движение в $\mathcal{E}_3$, представляющее собой поворот вокруг некоторой прямой, есть также поворот вокруг полярной прямой.

14. Перпендикуляр из точки на прямую в $\mathcal{E}_3$. Перпендикуляр, опущенный в $\mathcal{E}_3$ из точки M_0 , лежащей вне данной прямой, на эту прямую можно рассматривать в плоскости $\mathcal{E}_2$, проходящей через эту точку и эту прямую (см. § 74, рубр. 8). Однако некоторые особенности, которые тут имеют место, и дальнейшие применения делают целесообразным рассмотреть эту задачу самостоятельно.

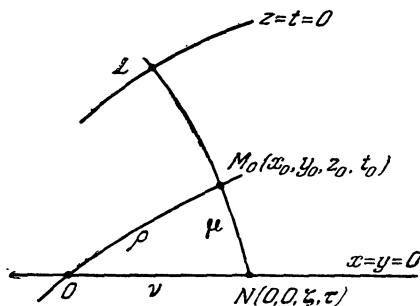
Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ будет точка, лежащая вне главных осей, так что ни x_0, y_0 , ни z_0, t_0 не равны одновременно нулю. Посмотрим, как пройдет перпендикуляр, опущенный из точки M_0 на первую ось $x=0, y=0$. Пусть N будет основание этого перпендикуляра (черт. 82); нормальные координаты этой точки обозначим через $(0, 0, \zeta, \tau)$. Через O обозначим, как прежде, точку $(0, 0, 0, 1)$; расстояния OM_0, ON, M_0N обозначим соответственно через ρ, ν, μ , так что

$$\cos \rho = t_0, \quad \cos \nu = \tau, \quad \cos \mu = z_0 \zeta + t_0 \tau.$$

В силу соотношений между сторонами прямоугольного треугольника (формула (42) § 74) $t_0 = \tau(z_0 \zeta + t_0 \tau)$, т. е. $t_0(1 - \tau^2) = z_0 \zeta \tau$, или $t_0 \zeta^2 = z_0 \zeta \tau$. Если точка O не совпадает с N (что мы всегда можем предполагать), то

$$\left. \begin{aligned} t_0 \zeta &= z_0 \tau, & \zeta^2 + \tau^2 &= 1, \\ \zeta &= \frac{z_0}{\sqrt{z_0^2 + t_0^2}}, & \tau &= \frac{t_0}{\sqrt{z_0^2 + t_0^2}}; \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

¹⁾ Вторая из матриц (33₁) единичная, а произведение определителей матриц (33₁) равно +1, так как (34) есть движение; следовательно, определитель первой из матриц (33₁) тоже равен +1.



Черт. 82.

двойной знак радикала соответствует возможному изменению знаков ξ , τ . Совершенно таким же образом найдем, что координаты (ξ, η) основания L перпендикуляра M_0L , опущенного на ось $z=0$, $t=0$, имеют значения:

$$\xi = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \quad \eta = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}. \quad (35a)$$

Матрица координат точек M_0 , N , L представляется, таким образом, в следующем виде:

$$\left\| \begin{array}{cccc} x_0 & y_0 & z_0 & t_0 \\ 0 & 0 & \frac{z_0}{\sqrt{z_0^2 + t_0^2}} & \frac{t_0}{\sqrt{z_0^2 + t_0^2}} \\ \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} & \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} & 0 & 0 \end{array} \right\|. \quad (36)$$

Определители третьего порядка этой матрицы все равны нулю. Это значит, что точки M_0 , L , N лежат на одной прямой. Мы приходим к следующей теореме.

В $\mathcal{E}_3$ через каждую точку M_0 , не лежащую ни на одной из двух взаимно полярных прямых, можно провести к каждой из них один и только один перпендикуляр, причем эти два перпендикуляра между собой совпадают.

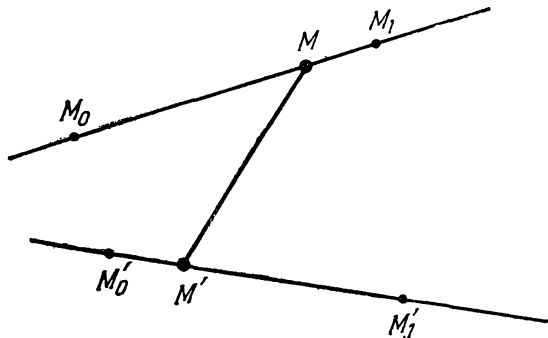
Расстояние μ точки M_0 от оси $x=0$, $y=0$, т. е. расстояние $\mu = M_0N$, определяется согласно (3) следующим равенством:

$$\cos \mu = \sqrt{z_0^2 + t_0^2}. \quad (37)$$

Мы воспользовались здесь выражениями координат точки N согласно (35). Двойной знак радикала, как обычно, соответствует двум значениям μ .

§ 76. ПРЯМЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ КЛИФФОРДА В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Расстояние между точками двух прямых. Предположим, что мы имеем в $\mathcal{E}_3$ две непересекающиеся прямые M_0M_1 и $M'_0M'_1$. Так как меньшее значение расстояния от точки одной прямой до точки другой меняется непрерывно при непрерывном передвижении точек по одной и другой прямой, то существует точка на одной прямой и соответствующая точка на другой, для которых это расстояние становится минимальным (при этом большее из значений расстояния достигает максимума). Эти точки экстремального удаления одной прямой от другой мы и постараемся разыскать.



Черт. 83.

Для этого мы будем искать экстремум выражения $\cos \rho$ ((3), § 75)

в предположении, что одна из точек лежит на одной, другая — на другой прямой.

На прямой M_0M_1 возьмем две взаимно полярные опорные точки (черт. 83):

$$M_0(x_0, y_0, z_0, t_0), \quad M_1(x_1, y_1, z_1, t_1),$$

тогда координаты (x, y, z, t) каждой точки M этой прямой можно выразить формулами (17) § 75:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0v + x_1w, \\ y &= y_0v + y_1w, \\ z &= z_0v + z_1w, \\ t &= t_0v + t_1w, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$v^2 + w^2 = 1. \quad (1')$$

На прямой $M'_0M'_1$ также возьмем две взаимно полярные опорные точки

$$M'_0(x'_0, y'_0, z'_0, t'_0), \quad M'_1(x'_1, y'_1, z'_1, t'_1);$$

координаты каждой точки M' этой прямой выразятся формулами

$$\left. \begin{aligned} x' &= x'_0v' + x'_1w', \\ y' &= y'_0v' + y'_1w', \\ z' &= z'_0v' + z'_1w', \\ t' &= t'_0v' + t'_1w', \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$v'^2 + w'^2 = 1. \quad (2')$$

Расстояние ρ точек M и M' (одно из его значений) определяется формулой

$$\cos \rho = avv' + bw' + cv'w + dww', \quad (3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a &= x_0x'_0 + y_0y'_0 + z_0z'_0 + t_0t'_0, \\ b &= x_0x'_1 + y_0y'_1 + z_0z'_1 + t_0t'_1, \\ c &= x_1x'_0 + y_1y'_0 + z_1z'_0 + t_1t'_0, \\ d &= x_1x'_1 + y_1y'_1 + z_1z'_1 + t_1t'_1. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Иначе говоря,

$$a = \cos \alpha, \quad b = \cos \beta, \quad c = \cos \gamma, \quad d = \cos \delta, \quad (5)$$

где

$$\alpha = M_0M'_0, \quad \beta = M_0M'_1, \quad \gamma = M_1M'_0, \quad \delta = M_1M'_1 \quad (5')$$

— надлежаще взятые значения расстояний между соответствующими точками. Нам нужно найти экстремальное значение выражения (3) при значениях v и w , v' и w' , связанных равенствами (1') и (2'). Вводя так называемые множители Лагранжа μ и ν , мы будем искать экстремум выражения

$$avv' + bw' + cv'w + dww' + \frac{\mu}{2}(v^2 + w^2) + \frac{\nu}{2}(v'^2 + w'^2) \quad (6)$$

по отношению к четырем независимым переменным v , w , v' , w' .

Дифференцирование дает для экстремума четыре линейных уравнения, связывающие эти переменные:

$$\left. \begin{aligned} \mu v + av' + bw' &= 0, \\ \mu w + cv' + dw' &= 0, \\ av + cw + \nu v' &= 0, \\ bv + dw + \nu w' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Чтобы эти уравнения имели относительно v, v', w, w' решения, отличные от нуля, необходимо, чтобы определитель

$$\begin{vmatrix} \mu & 0 & a & b \\ 0 & \mu & c & d \\ a & c & \nu & 0 \\ b & d & 0 & \nu \end{vmatrix} \quad (8)$$

был равен нулю. При этом, умножая первое из уравнений (7) почленно на v , второе на w и складывая, находим вследствие соотношения (1'):

$$\mu + avv' + bvw' + cww' + dww' = 0 \quad (9)$$

и аналогично

$$\nu + avv' + bvw' + cww' + dww' = 0; \quad (9')$$

потому, если принять во внимание (3),

$$\mu = \nu = -\cos \rho.$$

Таким образом значение $\mu = \nu$ характеризует искомое экстремальное расстояние ρ . Определитель же (8) примет вид

$$\begin{vmatrix} \mu & 0 & a & b \\ 0 & \mu & c & d \\ a & c & \mu & 0 \\ b & d & 0 & \mu \end{vmatrix} \quad (10)$$

и дает «характеристическое» уравнение задачи:

$$\mu^4 - \mu^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + E^2 = 0, \text{ где } E = ad - bc. \quad (11)$$

Это квадратное уравнение относительно μ^2 , дискриминант которого равен

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - 4(ad - bc)^2 = \\ = \{(a + d)^2 + (b - c)^2\} \{(a - d)^2 + (b + c)^2\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Он не может иметь отрицательного значения. Уравнение (11) дает поэтому два вещественных значения μ^2 ; более того, эти значения будут неотрицательными — в противном случае левая часть (11) была бы положительной и не могла бы равняться нулю. Каждому значению μ^2 отвечают два значения μ , отличающихся только знаком (следовательно, два значения ρ , дополняющих друг друга до π), и точка M на одной прямой и соответствующая точка M' на другой прямой; эти точки мы находим из уравнений (7). Так, из трех последних уравнений (7) найдем отношение значений v, w, v', w' друг к другу

$$v : w : v' : w' =$$

$$= [\mu(\mu^2 - c^2 - d^2)] : [\mu(ac + bd)] : [-\mu^2 a + ad^2 - bcd] : [-\mu^2 b + bc^2 - acd]. \quad (13)$$

Заметим, что при замене в (13) μ на $-\mu$ меняют знаки также и v, w , а v', w' сохраняют прежние значения (или наоборот); точки M, M' во всяком случае не меняются. Эту пару точек M и M' будем называть экстремальной для прямых M_0M_1 и $M'_0M'_1$; соединяющую их прямую будем называть экстремальной прямой¹⁾. Двум различным значениям μ^2 отвечают, как мы увидим, ровно две экстремальные прямые. Имея в виду исследовать взаимное расположение экстремальных прямых, остановимся прежде всего на том случае, когда характеристическое уравнение имеет относительно μ^2 различные корни.

2. Исследование характеристического уравнения, когда оно имеет различные корни. Обращаясь к этому исследованию, мы попрежнему будем предполагать, что прямые M_0M_1 и $M'_0M'_1$ не лежат в одной плоскости, а потому не имеют общей точки. Заметим, что оба корня μ^2 обращаются в нуль, как видно из (14), тогда и только тогда, когда

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0 \text{ и } E^2 = 0,$$

т. е.

$$a = b = c = d = 0$$

и, следовательно, расстояние ρ равно $\frac{\pi}{2}$ для любых точек M и M' , иначе говоря, при взаимно полярных прямых M_0M_1 и $M'_0M'_1$. Оставляя в стороне исключительные случаи, мы будем сначала исследовать характеристическое уравнение, когда оно имеет различные корни и притом оба отличные от нуля. Покажем, что при этом миноры всех элементов определителя (10) не обращаются одновременно в нуль; более того, не обращаются одновременно в нуль миноры элементов главной диагонали. В самом деле, миноры этих элементов суть

$$\mu(\mu^2 - d^2 - c^2), \mu(\mu^2 - a^2 - b^2), \mu(\mu^2 - d^2 - b^2), \mu(\mu^2 - a^2 - c^2), \quad (14)$$

где под μ мы понимаем какой-либо корень уравнения (11). Если бы все эти миноры были равны нулю, то, так как $\mu \neq 0$, мы имели бы

$$b^2 = c^2, a^2 = d^2.$$

Вместе с тем мы имели бы $\mu^2 = d^2 + c^2$; но тогда другой корень квадратного уравнения (11) относительно μ^2 был бы равен $a^2 + b^2$; характеристическое уравнение имело бы равные корни — случай, который мы исключили.

Если будем считать отличным от нуля первый из миноров (14), то значения v, v', w, w' , определяемые уравнениями (7), пропорциональны адъюнктам элементов первой горизонтали определителя (10). Эти адъюнкты (см. (13)) суть:

$$I = \mu(\mu^2 - c^2 - d^2), II = \mu(ac + bd), III = dE - a\mu^2, IV = -(cE + b\mu^2),$$

а вместе с тем

$$v = hI, w = hII, v' = hIII, w' = hIV, \quad (13')$$

где h — некоторый коэффициент пропорциональности.

¹⁾ Это не означает, конечно, что меньшее расстояние между точками двух данных прямых обязательно достигает здесь своего минимума; возможно, что это расстояние имеет просто стационарное значение (т. е. его полный дифференциал равен нулю). Это согласуется и с характером исследования, где применен лишь необходимый признак экстремума.

Умножая первое из уравнений (7) на v , второе—на w , третье—на v' , четвертое—на w' и складывая их почленно, убеждаемся, что

$$v^2 + w^2 = v'^2 + w'^2.$$

Отсюда мы видим, что множитель h в равенствах (13') можно выбрать так, чтобы

$$v^2 + w^2 = v'^2 + w'^2 = 1. \quad (15)$$

При замене μ на $-\mu$ определители I и II меняют свои знаки на обратные, а вместе с тем (при том же h) меняют свои знаки коэффициенты v , w и, следовательно, координаты (1) экстремальной точки M (которая сама при этом, конечно, не меняется). Определители же III и IV при этом сохраняют свои значения, а вместе с тем сохраняют свои значения коэффициенты v' и w' и координаты (2) соответствующей точки M' . Другому корню μ^2 отвечает свое значение ρ и соответственно свои точки M и M' .

3. Случай, когда характеристическое уравнение имеет нулевой корень. Обращаемся к случаю, который мы исключили, когда одно из значений μ^2 равно 0. Как видно из (11), это может иметь место только при $E=0$. Оставаясь при предположении, что характеристическое уравнение не имеет равных корней, заключаем, что второй корень μ^2 отличен от нуля; соответствующие ему экстремальные точки M и M' разыскиваются так же, как это сделано в предыдущей рубрике. Для корня же $\mu^2=0$, соответствующие уравнения (7) дают в этом случае:

$$\left. \begin{aligned} av' + bw' &= 0, & av + cw &= 0, \\ cv' + dw' &= 0, & bv + dw &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Так как $E = ad - bc = 0$, то эти две системы (если учесть еще (1'), (2')) дают с точностью до знака значения v , w , v' , w' , а вместе с тем и экстремальную пару точек M , M' . Таким образом, если характеристическое уравнение не имеет равных корней, то всегда существуют ровно две пары экстремальных точек M и M' .

4. Экстремальные общие перпендикуляры к двум непересекающимся прямым. Разыскав точки M и M' на данных двух непересекающихся прямых, имеющие экстремальное или, по крайней мере, стационарное расстояние, покажем, что экстремальная прямая MM' всегда перпендикулярна к обоим данным прямым (M_0M_1 и $M_0M'_1$). Чтобы упростить вычисление, предположим, что две опорные точки M_0 и M'_0 одной и другой прямой взяты соответственно в точках M и M' данной экстремальной прямой. Более того, плоскость $M_0M_1M'_1$ примем за координатную плоскость $t=0$ (черт. 84) и в ней прямую M_0M_1 —за ось $y=t=0$. Точка M (M_0) будет иметь координаты $y_0=t_0=0$; не нарушая общности, мы можем положить и $z_0=0$, т. е. считать, что плоскость $z=0$ проходит через точку M_0 . Таким образом точка M_0 имеет координаты

$$x_0 = \pm 1, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0, \quad t_0 = 0.$$

Если тогда точка M_1 (полярная к M_0) имеет координаты x_1, y_1, z_1, t_1 , то

$$x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 + t_0t_1 = 0,$$

а потому $x_1=0$; кроме того, $y_1=0$, $t_1=0$, а следовательно, $z_1=\pm 1$. Коэффициенты (4) a , b , c , d характеристического уравнения получают при этой координации значения

$$a = x_0 x'_0, \quad b = x_0 x'_1, \quad c = z_1 z'_0, \quad d = z_1 z'_1. \quad (17)$$

Так как точки M_0 , M'_0 взяты в совмещении с M , M' , то согласно (1), (2) мы получаем $w=w'=0$ и уравнения (7) (второе и четвертое) дают нам

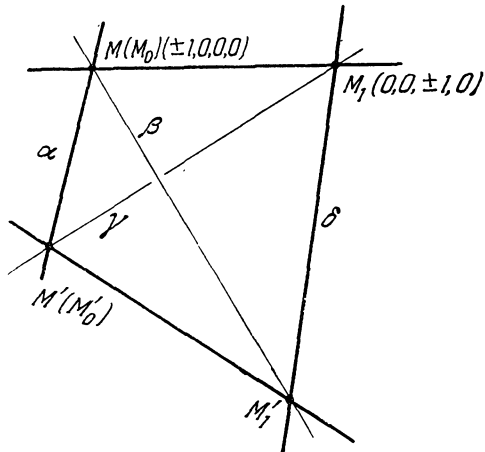
$$cv'=0, \quad bv=0, \quad (18)$$

откуда

$$c=b=0,$$

так как ни v , ни v' в нуль не обращаются (согласно (1') и (2')). Если поэтому обозначим, как указано на чертеже, длины отрезков MM' , MM'_1 , $M'M_1$, $M_1M'_1$ (надлежащее значение каждого из них) соответственно через α , β , γ , δ , то (см. (17))

$$\left. \begin{aligned} a &= \cos \alpha, & b &= \cos \beta, \\ c &= \cos \gamma, & d &= \cos \delta. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$



Черт. 84.

Отсюда $\beta=\gamma=\frac{\pi}{2}$; кроме того, отрезки MM_1 и $M'M'_1$ также имеют длину $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, MM' есть полярная точки M_1 в плоскости M_1MM'

и полярная точки M'_1 в плоскости M'_1MM' и, в частности, MM' перпендикулярна к прямым MM_1 , $M'M'_1$ (§ 74, рубр. 8). Нетрудно заметить также, что прямые MM' и $M_1M'_1$ — взаимные полярные (§ 75, рубр. 11).

Итак, всякая экстремальная прямая MM' перпендикулярна к исходным прямым.

Одна из экстремальных прямых MM' совпадает у нас с $M_0M'_0$; покажем, что в случае различных корней характеристического уравнения вторая из них совпадает с $M_1M'_1$, так что экстремальные прямые — взаимные полярные. Вследствие (18) характеристическое уравнение (11) принимает вид

$$\mu^4 - \mu^2(a^2 + d^2) + a^2d^2 = 0,$$

откуда или $\mu^2 = a^2$, или $\mu^2 = d^2$, причем $a^2 \neq d^2$. Корни $\mu = \pm a$ дают прежнюю экстремальную прямую $M_0M'_0$, как легко получить из второго и четвертого уравнений (7); корни же $\mu = \pm d$ приводят первое и третье уравнения (7) к виду

$$\pm dv + av' = 0, \quad av \pm dv' = 0.$$

Определитель этой системы $d^2 - a^2$ отличен от нуля в силу неравенства корней характеристического уравнения. Следовательно, $v=v'=0$, и для второй экстремальной прямой точки M , M' совпадают с M_1 , M'_1 .

Итак, в случае различных корней характеристического уравнения экстремальные прямые являются двумя взаимно полярными общими перпендикулярами к двум данным непересекающимся прямым.

5. Другие общие перпендикуляры к двум прямым. Последний результат дополним более общей теоремой, устанавливающей, как от одного общего перпендикуляра к двум непересекающимся прямым всегда можно перейти к другому.

Теорема. Если $M_0M'_0$ есть общий перпендикуляр к двум непересекающимся прямым M_0M_1 и $M'_0M'_1$ (черт. 84) и на них точки M_1 и M'_1 соответственно полярны точкам M_0 и M'_0 (т. е. $M_0M_1 = M'_0M'_1 = \frac{\pi}{2}$), то прямая $M_1M'_1$ также перпендикулярна к этим прямым.

Действительно, обозначим, как и выше, длины отрезков $M_0M'_0$, $M_0M'_1$, M'_0M_1 , $M_1M'_1$ соответственно через α , β , γ , δ (как помечено на черт. 84); тогда из треугольников $M'_0M_0M_1$ и $M_0M'_0M'_1$, в которых углы M_0 и M'_0 прямые, а стороны M_0M_1 и $M'_0M'_1$ имеют длины $\frac{\pi}{2}$, заключаем, что

$$\cos \beta = \cos \gamma = 0,$$

а поэтому

$$\beta = \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, точка M_0 полярна не только M_1 , но и M'_1 ; M'_0 полярна не только M'_1 , но и M_1 .

Поэтому прямая $M_1M'_1$ полярна как точке M_0 , так и точке M'_0 (§ 74, рубр. 4), а потому углы $M_0M_1M'_1$ и $M'_0M'_1M_1$ — прямые (§ 74, рубр. 8). Общему перпендикуляру $M_0M'_0$ соответствует таким образом второй общий перпендикуляр $M_1M'_1$.

Исследуем, существуют ли кроме $M_0M'_0$ и $M_1M'_1$ еще общие перпендикуляры к тем же прямым.

С этой целью примем M_0 и M_1 , а также M'_0 и M'_1 за опорные точки координации на соответствующих прямых и предположим, что прямая NN' также перпендикулярна к тем же прямым M_0M_1 и $M'_0M'_1$ (черт. 85). Согласно (1) нормальные координаты ξ , η , ζ , τ и ξ' , η' , ζ' , τ' точек N и N' выражаются через координаты опорных точек формулами:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= vx_0 + wx_1, & \xi' &= v'x'_0 + w'x'_1, \\ \eta &= vy_0 + wy_1, & \eta' &= v'y'_0 + w'y'_1, \\ \zeta &= vz_0 + wz_1, & \zeta' &= v'z'_0 + w'z'_1, \\ \tau &= vt_0 + wt_1; & \tau' &= v't'_0 + w't'_1. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Возьмем на прямых M_0M_1 , $M'_0M'_1$ точки L и L' , соответственно полярные точкам N и N' (черт. 85). Тогда по только что доказанной теореме LL' — также общий перпендикуляр к M_0M_1 , $M'_0M'_1$, причем точка L полярна не только N , но и N' , а L' полярна не только N' ,

но и N . Координаты точек L , L' можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi} &= -\omega x_0 + \nu x_1, & \bar{\xi}' &= -\omega' x'_0 + \nu' x'_1, \\ \bar{\eta} &= -\omega y_0 + \nu y_1, & \bar{\eta}' &= -\omega' y'_0 + \nu' y'_1, \\ \bar{\zeta} &= -\omega z_0 + \nu z_1, & \bar{\zeta}' &= -\omega' z'_0 + \nu' z'_1, \\ \bar{\tau} &= -\omega t_0 + \nu t_1, & \bar{\tau}' &= -\omega' t'_0 + \nu' t'_1. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Действительно, прямой проверкой убеждаемся, что

$$\bar{\xi}\bar{\xi} + \bar{\eta}\bar{\eta} + \bar{\zeta}\bar{\zeta} + \bar{\tau}\bar{\tau} = 0, \quad \bar{\xi}'\bar{\xi}' + \bar{\eta}'\bar{\eta}' + \bar{\zeta}'\bar{\zeta}' + \bar{\tau}'\bar{\tau}' = 0,$$

т. е. первая из точек (21) полярна N , а вторая N' , а следовательно, эти точки совпадают с L и L' .

Запишем теперь, что L полярна N' , а L' полярна N :

$$\bar{\xi}\bar{\xi}' + \bar{\eta}\bar{\eta}' + \bar{\zeta}\bar{\zeta}' + \bar{\tau}\bar{\tau}' = 0, \quad \bar{\xi}'\bar{\xi} + \bar{\eta}'\bar{\eta} + \bar{\zeta}'\bar{\zeta} + \bar{\tau}'\bar{\tau} = 0. \quad (22)$$

Эти условия не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы прямая NN' была общим перпендикуляром к исходным прямым. Действительно, в этом случае L будет полярна N и N' одновременно, а следовательно, полярна прямой NN' , откуда следует (§ 74, рубр. 8), что LN (т. е. M_0M_1) перпендикулярна к NN' . Аналогично и для $M'_0M'_1$. Как следствие (20) и (21), соотношения (22) принимают вид

$$-a\omega\nu' + d\nu\omega' = 0, \quad d\omega\nu' - a\omega' = 0. \quad (22')$$

При этом a , b , c , d имеют прежние значения (4). Необходимо учесть, что вследствие полярности точек M_0 и M'_1 , M'_0 и M_1

$$b = x_0x'_1 + y_0y'_1 + z_0z'_1 + t_0t'_1 = 0, \quad c = x'_0x_1 + y'_0y_1 + z'_0z_1 + t'_0t_1 = 0.$$

Теперь рассмотрим два возможных случая, основной и специальный.

Основной случай: $a^2 \neq d^2$. В этом случае определитель системы (22') отличен от нуля и мы получаем: $\omega\nu' = \nu\omega' = 0$. Отсюда следует, что или $\omega = \omega' = 0$, или $\nu = \nu' = 0$ (заметим, что в силу (1') ν и ω одновременно в нуль не обращаются; то же справедливо для ν' и ω'). Таким образом точки N , N' совпадают или с M_0 , M'_0 , или с M_1 , M'_1 , и других общих перпендикуляров, кроме $M_0M'_0$ и $M_1M'_1$, исходные прямые не имеют.

Легко заметить, что основным случай есть случай различных корней характеристического уравнения (11), которые как раз имеют вид $\mu^2 = a^2$, $\mu^2 = d^2$ (если учесть, что $b = c = 0$).

Специальный случай: $a^2 = d^2$, т. е. характеристическое уравнение имеет двойной корень $\mu^2 = a^2$.

Выделим прежде всего еще более специальный случай $a^2 = d^2 = 0$. В этом случае $a = b = c = d = 0$ и точки M_0 , M'_0 , M_1 , M'_1 попарно полярны во всех комбинациях. Это означает, что прямые M_0M_1 и $M'_0M'_1$ — взаимные полярны, случай, ранее уже рассмотренный (§ 75).

Будем считать теперь $a^2 = d^2 > 0$. Тогда $a = \pm d \neq 0$, и уравнения (22') дают

$$\text{или } \omega\nu' = \nu\omega', \text{ или } \omega\nu' = -\nu\omega'.$$

Учитывая, что $\nu^2 + \omega^2 = 1$, $\nu'^2 + \omega'^2 = 1$, мы получаем отсюда:

$$\left. \begin{aligned} \text{или} \quad \left. \begin{aligned} \nu' &= \nu \\ \omega' &= \omega \end{aligned} \right\}, \quad \text{или} \quad \left. \begin{aligned} \nu' &= \nu \\ \omega' &= -\omega \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

(с точностью до изменения знаков у v' , w' одновременно). Так как v , w во всяком случае остаются произвольными, а v' , w' определяются через них, то это означает, что точку N на прямой M_0M_1 можно брать произвольно, причем точка N' на прямой $M'_0M'_1$ определяется тогда уже единственным образом. В итоге через каждую точку N на прямой M_0M_1 проходит один и только один общий перпендикуляр к прямым M_0M_1 , $M'_0M'_1$.

Общий результат, таким образом, сводится к следующему.

Если для двух непересекающихся прямых характеристическое уравнение (11) имеет различные корни μ^2 , то эти прямые имеют два и только два общих перпендикуляра; если же оно имеет равные, но ненулевые корни, то перпендикуляр, опущенный из любой точки одной прямой на другую, перпендикулярен к обоим прямым. Вместе с тем, как легко получить из (3), все точки одной прямой отстоят на одно и то же расстояние от другой прямой. Самое условие $a = \pm d$ выражает, что расстояние $M_0M'_0$ равно $M_1M'_1$ (как обычно, в том смысле, что меньшее значение одного расстояния равно меньшему значению другого и соответственно большее значение одного расстояния равно большему значению другого). В случае же равных нулевых корней характеристического уравнения исходные прямые — взаимные полярны и всякая прямая, их пересекающая, является общим перпендикуляром.

6. Клиффордовы параллели в $\mathcal{E}_3$. Две эквидистантные прямые, т. е. отстоящие на постоянном расстоянии одна от другой в указанном смысле, называются клиффордовыми параллелями, так как их существование впервые было указано Клиффордом (W. K. Clifford [68]). В связи с этим возникает вопрос, проходят ли через данную точку клиффордовы параллели к данной прямой, и при благоприятном ответе, сколько их через данную точку проходит.

Если данная точка отстоит от данной прямой на расстояние $\frac{\pi}{2}$, то проходящая через нее параллель к данной прямой, очевидно, полярна ей. Через эту точку проходит к этой прямой только одна клиффордова параллель — полярная ей прямая. Но обычно прямую, полярную данной, не относят к клиффордovým параллелям; мы также будем придерживаться этого правила.

Итак, предположим, что прямая, выражаемая уравнениями

$$z = ax + by, \quad t = cx + dy, \quad (24)$$

есть клиффордова параллель по отношению к оси $z = 0, t = 0$, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$, так что

$$z_0 = ax_0 + by_0, \quad t_0 = cx_0 + dy_0. \quad (24')$$

Согласно нашему предположению все точки этой прямой отстоят от оси $z = t = 0$ на одно и то же расстояние μ . Согласно формуле (37) § 75 для этого необходимо и достаточно, чтобы выражение $x^2 + y^2$ сохраняло постоянное значение $\cos^2 \mu$ для всех точек прямой (24). Другими словами, для всех значений x, y , удовлетворяющих условию нормировки

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1, \quad (25)$$

где z и t выражаются согласно (24), выражение $x^2 + y^2$ должно оставаться равным $\cos^2 \mu$. Но (25) можно переписать в виде

$$(1 + a^2 + c^2)x^2 + 2(ab + cd)xy + (1 + b^2 + d^2)y^2 = 1. \quad (25')$$

Чтобы для всех значений (x, y) , удовлетворяющих (25'), имело место и соотношение

$$x^2 + y^2 = \cos^2 \mu,$$

необходимо и достаточно потребовать

$$1 + a^2 + c^2 = 1 + b^2 + d^2 = \frac{1}{\cos^2 \mu}, \quad ab + cd = 0. \quad (26)$$

Мы считаем, что точка M_0 не лежит ни на оси $z = t = 0$, ни на полярной к ней прямой $x = y = 0$. Всегда можно считать при этом $0 < \mu < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, условия (26) можно переписать в виде

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = q^2, \quad ab + cd = 0, \quad (27)$$

где $q = \operatorname{tg} \mu > 0$. При этом коэффициенты a и c , как и b и d , не могут быть совместно равны нулю, так как это влекло бы за собой $q = 0$.

Из последнего равенства (27) следует теперь пропорциональность величин a , c и d , $-b$:

$$d = \varepsilon a, \quad b = -\varepsilon c, \quad (28)$$

где ε — некоторый коэффициент пропорциональности. Первое из равенств (27) принимает вид $a^2 + c^2 = \varepsilon^2(a^2 + c^2)$, откуда

$$\varepsilon^2 = 1, \quad \varepsilon = \pm 1. \quad (29)$$

Мы хотим найти клиффордову параллель к оси $z = t = 0$, проходящую через данную точку M_0 . Поэтому a , b , c , d должны удовлетворять не только (28), но и (24'). Эти соотношения можно записать теперь так:

$$z_0 = ax_0 - \varepsilon cy_0, \quad t_0 = cx_0 + \varepsilon ay_0. \quad (30)$$

Умножая первое из уравнений на x_0 , второе на εy_0 и складывая почленно, получаем:

$$z_0 x_0 + \varepsilon t_0 y_0 = a(x_0^2 + y_0^2),$$

а с другой стороны, умножая первое уравнение на $-\varepsilon y_0$, второе на x_0 и складывая, получаем:

$$-\varepsilon z_0 y_0 + t_0 x_0 = c(x_0^2 + y_0^2).$$

Итак, окончательно, из (28) и последних соотношений вытекает:

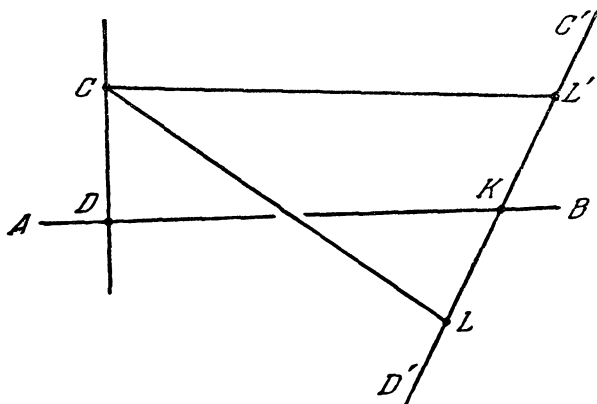
$$a = \varepsilon d = \frac{z_0 x_0 + \varepsilon t_0 y_0}{x_0^2 + y_0^2}, \quad c = -\varepsilon b = \frac{-\varepsilon z_0 y_0 + t_0 x_0}{x_0^2 + y_0^2}. \quad (31)$$

Каждому из двух значений $\varepsilon = \pm 1$ отвечают свои значения коэффициентов a , b , c , d в уравнениях клиффордовой параллели. Таким образом мы приходим к теореме:

Теорема. Через каждую точку, лежащую на $\mathcal{E}_3$ вне данной прямой и вне полярной ей прямой, проходят две клиффордовы параллели к данной прямой.

Вывод, конечно, не теряет общности от того, что за базисную прямую принята ось координации: с ней может быть совмещена всякая другая прямая.

7. Построение клиффордовой параллели к данной прямой через данную точку. Собственно существование двух параллелей к данной прямой через точку, лежащую вне этой прямой, доказывается проще без вычислений. В самом деле, пусть AB — данная прямая (черт. 86), C — точка, лежащая вне ее и вне полярной ей прямой. Из C опустим на AB перпендикуляр CD ; длина его отлична от $\frac{\pi}{2}$. Пусть $C'D'$ — прямая, полярная CD . На AB отложим от D отрезок DK длиной $\frac{\pi}{2}$. Так как точка K отстоит от D на расстояние $\frac{\pi}{2}$, причем CD перпендикулярна к AB , то K отстоит на то же расстояние от всякой



Черт. 86.

точки прямой DC . Следовательно, она лежит на пересечении всех плоскостей, полярных различным точкам прямой CD , т. е. на прямой $C'D'$, полярной CD (§ 75, рубр. 9). На прямой $C'D'$ отложим отрезок $KL = DC$. Так как прямые CL и DK как прямые, соединяющие точки взаимно полярных прямых CD и $C'D'$, будут к ним перпендикулярны (§ 75, рубр. 8), то прямые CL и DK имеют общие перпендикуляры DC и KL , равные по длине. Но это возможно лишь в случае, когда CL — клиффордова параллель к прямой DK , проходящая через точку C (рубр. 5). Так как на прямой $C'D'$ существуют две точки L, L' , отстоящие от K на расстоянии, равном DC , то через точку C проходят две клиффордовы параллели к AB . Вычисления, выполненные в предыдущей рубрике, дают уравнения этих прямых (параллелей) для того случая, когда базисной прямой служит ось $z = t = 0$. Если оставим значения x_0, y_0, z_0, t_0 произвольными (с тем единственным условием, что ни $x_0^2 + y_0^2$, ни $z_0^2 + t_0^2$ не равно нулю), то ограничения (24') на коэффициенты a, b, c, d отпадают и a, b, c, d будут связаны лишь соотношениями (28); уравнения (24) принимают вид

$$z = ax + by, \quad t = \varepsilon(-bx + ay), \quad (32)$$

где a, b — произвольные параметры (не обращающиеся одновременно в нуль). Уравнения (32) выразят всю совокупность клиффордовых

параллелей к оси $z=t=0$. Двойное значение $\varepsilon = \pm 1$ приводит к их разбиению на две категории. Заметим, что все параллели одной категории попарно параллельны между собой в смысле Клиффорда.

8. Клиффордовы поверхности. Поверхность, образуемая вращением клиффордовой параллели вокруг ее базисной прямой, называется клиффордовой поверхностью; ось вращения называется осью поверхности. Ясно, что клиффордова поверхность есть геометрическое место точек, отстоящих на данном расстоянии от ее оси. Вместе с тем ясно, что две клиффордовы параллели к оси, выходящие из общей точки, при вращении вокруг оси образуют ту же поверхность. Каждая из них при вращении порождает свою систему клиффордовых параллелей — образующих клиффордовой поверхности.

Клиффордова поверхность во многих отношениях сохраняет свойства цилиндрической поверхности евклидовой геометрии: когда ось скользит по себе, то вся поверхность передвигается по себе; скольжением по оси и вращением вокруг нее каждая точка поверхности может быть приведена в каждую другую ее точку. Две параллели одной системы не могут иметь общей точки. Напротив, две параллели различных систем на клиффордовой поверхности всегда пересекаются. Проверим это аналитически. Уравнения двух образующих нашей поверхности будут иметь вид (24):

$$\left. \begin{aligned} z &= ax + by, & z &= a'x + b'y, \\ t &= cx + dy, & t &= c'x + d'y. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Поскольку они лежат на одной клиффордовой поверхности, то по смыслу соотношений (27)

$$a^2 + c^2 = a'^2 + c'^2, \quad (34)$$

так как значение q будет общим для обеих образующих; при этом (уравнения (28))

$$d = \varepsilon a, \quad b = -\varepsilon c, \quad d' = \varepsilon' a', \quad b' = -\varepsilon' c'. \quad (35)$$

Чтобы уравнения (33) имели общее решение, т. е. чтобы им отвечали общие значения x, y, z, t , не обращающиеся одновременно в нуль, нужно, чтобы

$$\begin{aligned} (a - a')x + (b - b')y &= 0, \\ (c - c')x + (d - d')y &= 0, \end{aligned}$$

а для этого определитель

$$\begin{vmatrix} a - a' & b - b' \\ c - c' & d - d' \end{vmatrix}$$

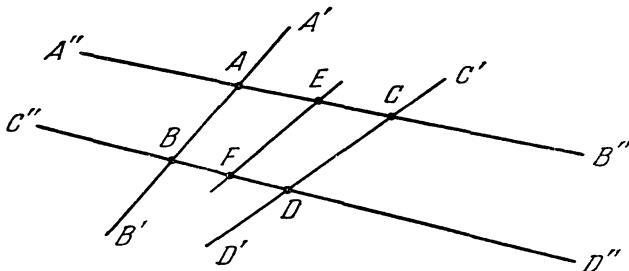
должен быть равен нулю (x, y не обращаются в нуль одновременно, так как иначе z, t тоже обращались бы в нуль вопреки $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$). В силу равенства (35) это приводит к тому, что в нуль должен обращаться определитель

$$\begin{vmatrix} a - a' & -\varepsilon c + \varepsilon' c' \\ c - c' & \varepsilon a - \varepsilon' a' \end{vmatrix}.$$

При $\epsilon' = \epsilon$ (образующие одной системы) этот определитель равен $\epsilon[(a-a')^2 + (c-c')^2]$ и может обращаться в нуль только, когда $a' = a$, $c' = c$, а вместе с тем $b' = b$, $d' = d$, т. е. когда прямые (33) совпадают. При $\epsilon' = -\epsilon$ (образующие — разных систем) этот определитель равен $\epsilon[a^2 - a'^2 + c^2 - c'^2]$ и вследствие равенства (34) обращается в нуль.

Каждая точка клиффордовой поверхности указанным выше путем может быть совмещена с любой другой ее точкой; при этом параллели оси (образующие), проходящие через первую точку, совместятся с образующими, проходящими через вторую точку. Отсюда следует, что две образующие — клиффордовы параллели различных систем — пересекаются на клиффордовой поверхности под одним и тем же углом.

Пусть $A''B''$ и $C''D''$ (черт. 87) — две образующие клиффордовой поверхности одной системы. Каждой точке E первой образующей отвечает



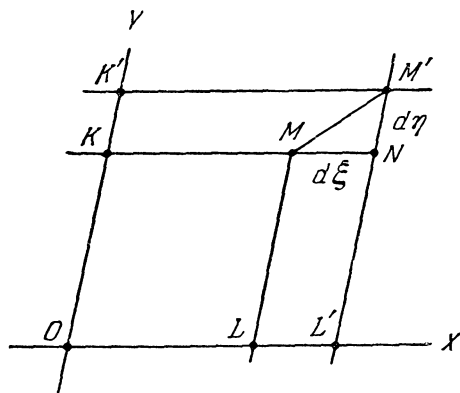
Черт. 87.

точка F второй образующей, лежащая вместе с E на одной образующей EF из другой системы.

Когда точка E пробегает отрезок AC/E образующей $A''B''$, соответствующая точка F пробегает отрезок BD/F образующей $C''D''$. Можно было бы доказать, что эти отрезки всегда равны по длине. Аналогичным образом равны по длине соответствующие отрезки AB и CD образующих $A'B'$ и $C'D'$. Часть клиффордовой поверхности, ограниченная отрезками AC , CD , DB , BA называется клиффордовым параллелограммом. Не меняя точек A , B , C , D , но заменяя отрезки AC/E и BD/F дополнительными к ним отрезками, можно получить еще один клиффордов параллелограмм. Наконец, заменяя в полученных параллелограммах отрезки AB и CD дополнительными к ним отрезками, получим еще два клиффордовых параллелограмма при тех же точках A , B , C , D . В результате вся клиффордова поверхность оказывается склеенной из четырех клиффордовых параллелограммов.

9. Декартовы координаты на клиффордовой поверхности. Пусть OX и OY будут две образующие, пересекающиеся в точке O (черт. 88) клиффордовой поверхности. На каждой из них каким-либо образом фиксируется положительное направление. Из точки M поверхности проведем ее образующие MK и ML , которые пересекут оси OX и OY , принадлежащие каждой другой системе, в точках L и K . Расстояния OL и OK (меньшие их значения) будем снабжать знаком $\pm$ в зависимости от направления отрезков OL и OK (не превышающих половины прямой) и будем обозначать через ξ и η ; числа ξ и η называются декартовыми координатами точки N на клиффордовой поверхности. Каждой точке поверхности отвечают таким образом вполне

определенные значения $-\frac{\pi}{2} < \xi < \frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} < \eta < \frac{\pi}{2}$ за исключением случаев, когда точка L или K полярна O ; тогда координате ξ или соответственно η можно приписать значение как $+\frac{\pi}{2}$, так и $-\frac{\pi}{2}$. Обратно, значениями ξ и η точка M вполне определяется. Остановимся еще на следующих соображениях, имеющих существенное значение.



Черт. 88.

Пусть M' будет точка, имеющая координаты $\xi + d\xi, \eta + d\eta$. Прямая $M'L'$ пересечет MK в точке N , причем

$$MN = LL' = d\xi, \quad NM' = KK' = d\eta.$$

Мы пользуемся здесь равенством противоположных сторон в клиффордовом параллелограмме. В бесконечно малом треугольнике MNM' , если пренебречь бесконечно малыми высшего порядка, имеют место соотношения евклидовой геометрии. Обозначая поэтому длину MM' через $d\rho$, будем иметь

$$d\rho^2 = d\xi^2 + d\eta^2 - d\xi d\eta \cos \omega,$$

где ω есть угол MNM' . Так как ω имеет на поверхности Клиффорда постоянное значение, то гауссова кривизна, определяемая этой формой, равна нулю. Клиффордова поверхность имеет таким образом во всех своих точках постоянную нулевую кривизну, т. е. несет на себе локально евклидову геометрию.

ГЛАВА СЕМНАДЦАТАЯ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ КЭЛИ—КЛЕЙНА

§ 77. ГЕОМЕТРИИ КЭЛИ—КЛЕЙНА С НЕВЫРОЖДЕННЫМ АБСОЛЮТОМ

1. Геометрия Кэли—Клейна вне кругового абсолюта; система *НН*. Идеи Кэли привели к трем видам мероопределения—к трем геометрическим системам в образах первой ступени, соответствующих трем видам инварианта двух элементов. С переходом к образам второй ступени в них появляются два независимых типа образов первой ступени (или одномерных образов); так, например, в плоскости имеются ряды коллинеарных точек (прямые линии) и пучки прямых. В каждом из этих образов первой ступени независимо от другого может быть установлено три типа мероопределения и, следовательно, всего возможны девять комбинаций, которые и ведут к девяти геометрическим системам, существенно отличающимися одна от другой. Расчленение и классификация этих систем была впервые опубликована Sommerville в 1910 г. (D. M. Sommerville [69]). Собственно говоря, эти идеи (в недостаточно развернутом виде) содержались уже в лекциях Клейна, которые он читал в Геттингенском университете еще в 1889—1890 гг. Лекции эти, ранее литографированные, были опубликованы его учеником В. Роземанном (W. Rosemann) после продолжительной и тщательной их переработки; они появились в свет уже после кончины Клейна в 1928 г., русский их перевод был выпущен в свет в 1936 г. [70]. Классификация геометрических систем, построенных по замыслу Кэли, составляет основное содержание этой главы.

Чтобы наиболее отчетливо выяснить их различие, мы возвратимся к простейшему двумерному абсолюту и связанной с ним геометрии—к круговому абсолюту и к геометрии Лобачевского (§§ 58, 59). Интерпретация гиперболической геометрии была построена внутри единичного круга; это было связано с тем, что преобразования Кэли—Клейна не только преобразовывают в себя окружность кругового абсолюта, но оставляют инвариантным весь ограничиваемый ею круг, т. е. внутренние точки этого круга преобразовываются во внутренние же точки. Вместе с тем часть плоскости, лежащая вне абсолюта, также преобразовывается в себя, и возникает вопрос, нельзя ли эту часть плоскости также сделать субстратом геометрии, сохраняя в качестве движений ту же группу Кэли—Клейна, и какова будет эта геометрия.

Обратим прежде всего внимание на то обстоятельство, что прямые, лежащие в этой области, естественно, разбиваются на две категории: на прямые, встречающие абсолют, и прямые, не встречающие абсолюта, т. е. целиком лежащие вне его. Это различие является существенным, ибо преобразование, которое оставляет абсолют инвариантным, преобразовывает прямые одной категории в прямые той же самой категории (так как

точки, в которых прямая встречается абсолют, переходят в точки, в которых абсолют встречается преобразованная прямая). Прямые первой категории, т. е. встречающие абсолют, будем называть *г и п е р б о л и ч е с к и м и*; прямые второй категории, не встречающие абсолют, будем называть *э л л и п т и ч е с к и м и*. Из числа гиперболических прямых естественно выделить еще прямые третьей категории, касающиеся абсолюта; будем их называть *и з о т р о п н ы м и*; это соответствует, как сейчас увидим, установленному выше значению этого термина.

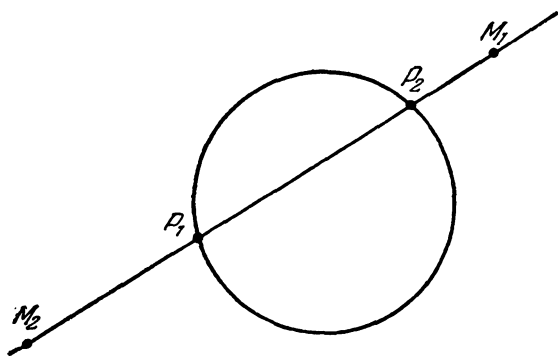
Будем строить двоякую геометрию вне кругового абсолюта, а именно: к первой (к геометрии Π_1) будем относить только гиперболические прямые, ко второй (к геометрии Π_2) — только эллиптические¹⁾. Все точки; расположенные вне абсолюта, мы будем относить как к одной, так и к другой геометрии. При этом не каждую пару точек в геометрии Π_1 и в геометрии Π_2 можно соединить прямой, относящейся к этой геометрии. В геометрии Π_1 пару точек M_1 и M_2 можно соединить прямой только в том случае, если M_1M_2 встречается абсолют (гиперболическая пара точек); напротив, в геометрии Π_2 пару точек M_1 и M_2 можно соединить прямой только в том случае, если M_1M_2 не встречается абсолюта (эллиптическая пара точек). Это обстоятельство может сначала показаться весьма странным: в знакомых нам до сих пор геометрических системах (в геометрии Евклида и в геометрии Лобачевского) каждые две точки можно соединить прямой, т. е. каковы бы ни были точки M_1 и M_2 , всегда существует прямая m , проходящая как через точку M_1 , так и через точку M_2 . Однако само по себе такое положение вовсе не является единственно возможным. И геометрия Евклида и геометрия Лобачевского обладают тем свойством, что в этих геометриях пара прямых не всегда пересекается в одной точке: для данных двух прямых m_1 и m_2 может существовать точка M , принадлежащая одновременно и m_1 и m_2 , но может и не существовать такой точки. Это обстоятельство в некотором смысле близко отмеченным особенностям геометрий Π_1 и Π_2 . Заходя несколько вперед, мы отметим тут, что в противоположность геометриям Евклида и Лобачевского геометрическая система Π_2 обладает тем свойством, что в ней каждые две прямые m_1 и m_2 пересекаются в некоторой точке M ; таким образом по сравнению с геометрией Лобачевского I здесь прямые и точки как бы «поменялись ролями» (в системе I для каждой пары точек можно найти общую им прямую, но не для каждой пары прямых — общую им точку; в системе Π_2 , наоборот, для каждой пары прямых можно найти общую им точку, но не для всяких двух точек — общую им прямую).

После этих предварительных замечаний рассмотрим подробнее систему Π_1 . Условимся, что под словом «абсолют» мы будем всегда понимать круговой абсолют двумерной геометрии; но одновременно с этим на каждой прямой будем вводить линейный абсолют для мероопределения расстояний между точками этой прямой и в каждом пучке — угловой абсолют для мероопределения углов между прямыми этого пучка. Пусть M_1M_2 — гиперболическая пара точек, так что прямая M_1M_2 встречается абсолют в двух точках P_1 и P_2 (которые мы пока будем считать различными (черт. 89)). Среди преобразований группы Кэли — Клейна («движений») имеется одночленная группа, оставляющая точки P_1 , P_2 в покое. Рассматривая точки P_1 , P_2 как линейный абсолют

¹⁾ Под геометрией I мы будем разумеать ту, которая построена внутри кругового абсолюта (геометрия Лобачевского).

мероопределения длин на прямой M_1M_2 (которую мы сейчас рассматриваем только в той ее части, которая лежит вне кругового абсолюта), мы установим на этой прямой гиперболическое мероопределение; расстояние (M_1M_2) точек M_1 и M_2 будет определено ангармоническим отношением $\{P_1P_2, M_1M_2\}$. Точнее, так как точки M_1 и M_2 не разделяют точек P_1, P_2 , то ангармонические отношения $\{P_1P_2, M_1M_2\}$ и $\{P_2P_1, M_1M_2\}$ положительны; произведение их равно 1. Поэтому одно из них больше 1, а второе меньше. Логарифм того из этих двух ангармонических отношений, которое больше 1 (ангармонического отношения $\{P_1P_2, M_1M_2\}$ для черт. 89), взятый с постоянным для всей области положительным множителем $\frac{k}{2}$, и принимается за расстояние (M_1M_2) точек M_1 и M_2 .

Установленное таким образом гиперболическое мероопре-



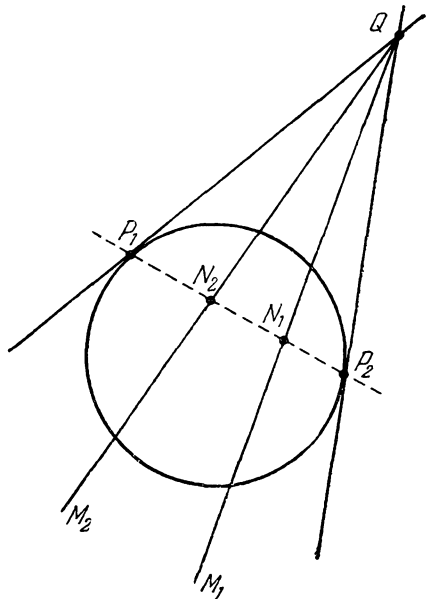
Черт. 89.

деление длин для прямых системы Π_1 очевидным образом будет инвариантно относительно «движений» этой геометрии: если преобразование Кэли—Клейна переводит точки M_1, M_2 в точки M'_1, M'_2 , то точки P_1, P_2 перейдут в точки P'_1, P'_2 , в которых встречается абсолют прямая $M'_1M'_2$; поэтому $\{P'_1P'_2, M'_1M'_2\} = \{P_1P_2, M_1M_2\}$ и $(M'_1M'_2) = (M_1M_2)$. Если прямая M_1M_2 касается абсолюта в единственной точке P , то

точки P_1 и P_2 следует считать совпавшими. В этом случае $\{PP, M_1M_2\} = 1$ и, следовательно, $(M_1M_2) = \frac{k}{2} \ln \{PP, M_1M_2\} = 0$. Таким образом в системе Π_1 расстояние между любыми двумя точками изотропной прямой равно нулю; это обстоятельство может служить оправданием самого термина «изотропная прямая». Наконец, если пара точек M_1M_2 является эллиптической (т. е. прямая M_1M_2 не пересекает абсолюта), то точки M_1 и M_2 в геометрии Π_1 нельзя соединить прямой. В этом случае надо считать, что расстояние (M_1M_2) вовсе не существует (аналогично тому как в геометрии Лобачевского не существует угла между прямыми, не пересекающимися ни в какой точке).

Перейдем теперь к вопросу о мероопределении углов в геометрии Π_1 . Отметим прежде всего, что две прямые этой геометрии могут не пересекаться — таковыми мы должны считать две гиперболические прямые, пересекающиеся внутри абсолюта или на абсолюте, поскольку к геометрии Π_1 причисляются лишь точки, внешние по отношению к абсолюту. (Аналогично этому две прямые геометрии I — геометрии Лобачевского — мы считали пересекающимися только в том случае, если они пересекаются внутри абсолюта.) Пусть теперь QM_1 и QM_2 — две прямые геометрии Π_1 (т. е. прямые, пересекающие абсолют), исходящие из точки Q , внешней по отношению к абсолюту (черт. 90). Проведем из точки Q еще касательные QP_1 и QP_2 к абсолюту. Прямые QM_1 и QM_2 будут располагаться

внутри угла P_1QP_2 . Установим в пучке прямых с вершиной Q мероопределение углов, угловым абсолютом которого являются касательные QP_1 и QP_2 ; точнее, примем угол M_1QM_2 пропорциональным логарифму того из ангармонических отношений $\{QP_1, QP_2; QM_1, QM_2\}$ и $\{QP_2, QP_1; QM_1, QM_2\}$, которое больше 1 (эти ангармонические отношения оба положительны, так как прямые QM_1 и QM_2 не разделяют прямых QP_1, QP_2 ; произведение их равно 1). Это мероопределение углов — гиперболическое. Ясно, что угол между прямыми QM_1 и QM_2 измеряется тем же числом, что и расстояние между точками N_1 и N_2 пересечения этих прямых с прямой P_1P_2 , измеренное в системе I — в геометрии Клейна внутри абсолюта¹⁾. Значение угла стремится к бесконечности, когда одна из прямых QM_1, QM_2 остается неподвижной, а вторая приближается к одной из изотропных прямых QP_1 и QP_2 пучка; действительно, если QM_1 не меняется, а QM_2 стремится к QP_2 , то $\{QP_1, QP_2; QM_1, QM_2\}$ (а следовательно, и угол M_1QM_2) неограниченно возрастает.



Черт. 90.

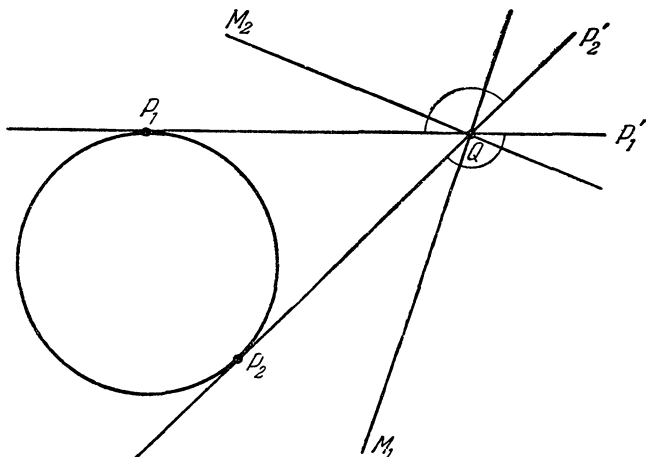
В геометрической системе Π_1 как мероопределение расстояний между точками прямой, так и мероопределение углов между прямыми пучка являются гиперболическими. Поэтому систему Π_1 мы будем обозначать двумя буквами HH (H — первая буква слова hyperbolicus — гиперболический).

2. Геометрия Кэли—Клейна вне кругового абсолюта; система EH .

Обратимся теперь к той же области вне кругового абсолюта, принимая, однако, за прямые только те прямые евклидовой плоскости, которые не встречаются абсолюта (система Π_2). В этой системе мероопределение расстояний между точками прямой будет эллиптическим; линейным абсолютом для этого мероопределения будут служить две сопряженные мнимые точки пересечения прямой с абсолютом. При этом здесь, как и в системе Π_1 , расстояние (M_1M_2) между точками M_1 и M_2 определено не для всех пар точек: если M_1, M_2 — гиперболическая пара точек, то расстояние (M_1M_2) не будет существовать (это связано с тем, что гиперболическую пару точек в геометрии Π_2 нельзя соединить прямой). Мероопределение углов в системе Π_2 будет гиперболическим: угловым абсолютом будут служить две действительные касательные, проведенные из вершины угла к абсолюту; эллиптические прямые, которые входят в субстрат этой геометрии (прямые QM_1, QM_2), проходят

¹⁾ Эти числа будут не равны, а только пропорциональны, если множитель $\frac{k}{2}$ в выражении для величины угла (см. выше стр. 142) отличен от аналогичного множителя в выражении для расстояний в системе I.

внутри углов P'_1QP_2 и P'_2QP_1 (черт. 91). При этом каждые две прямые геометрии Π_2 образуют между собой некоторый угол (ибо каждые две эллиптические прямые пересекаются в точке, внешней по отношению к абсолюту, поскольку обе они целиком состоят из таких точек). Систему Π_2 целесообразно обозначать через $ЕН$ (эллиптическое мероопределение расстояний и гиперболическое мероопределение углов).



Черт. 91.

Итак, область вне кругового абсолюта служит субстратом двух новых геометрий $НН$ и $ЕН$, существенно отличающихся от геометрии Лобачевского.

3. Выражения длин и углов в геометрических системах с круговым абсолютом (I , Π_1 , Π_2). Рассмотренные три системы — внутри кругового абсолюта (I) и вне его (Π_1 и Π_2), могут быть без изменения их геометрического содержания построены при абсолюте, представляющем собой любое невырожденное коническое сечение: действительный круг, эллипс, гиперболу, параболу. Система, построенная в этом порядке идей внутри абсолюта, есть геометрия Лобачевского; две другие не отличаются по существу от системы Π_1 и Π_2 . Мы займемся теперь аналитическим выражением расстояний и углов в каждой из рассмотренных трех систем, считая для простоты абсолютом кругом.

Геометрия, построенная внутри абсолюта (I), как мы знаем, есть геометрия Лобачевского. Формула для расстояния между двумя точками в этой геометрии нами в своем месте выведена на основании тригонометрических соображений (ч. I, § 42, формулы (LIII), (LIII₁)); потом (§ 70) было обнаружено, что к той же формуле для расстояния приводит и замысел Кэли в его осуществлении, выполненном Клейном.

Несколько иначе обстоит дело с выражением значения угла между двумя прямыми в гиперболической геометрии. В § 42 (ч. I, стр. 337) соответствующая формула (LXII₂) выведена при помощи тригонометрических соотношений, а в интерпретации Клейна та же формула (формула (17) из § 64) выведена при помощи иных соображений — на основе свойств «движений», установленных в этой интерпретации. Посмотрим теперь, что дают в этом отношении соображения Кэли.

Если

$$\lambda_1 x + \mu_1 y = 1, \quad \lambda_2 x + \mu_2 y = 1 \quad (1)$$

суть две прямые в плоскости абсолюта, то уравнение

$$l(\lambda_1 x + \mu_1 y - 1) + m(\lambda_2 x + \mu_2 y - 1) = 0 \quad (1')$$

выражает пучок прямых, проходящих через точку пересечения прямых (1); l, m — однородные координаты прямой этого пучка. Расстояние (евклидово) этой прямой от начала выражается числом

$$\frac{|l + m|}{\sqrt{(l\lambda_1 + m\lambda_2)^2 + (l\mu_1 + m\mu_2)^2}}. \quad (2)$$

Если эта прямая касается кругового абсолюта, т. е. окружности радиуса 1 с центром в начале координат, то это расстояние равно 1; следовательно условие, чтобы прямая (l, m) пучка касалась абсолюта, можно выразить равенством

$$(l + m)^2 = (l\lambda_1 + m\lambda_2)^2 + (l\mu_1 + m\mu_2)^2, \quad (3)$$

или, полагая

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 - 1 = \nu_1^2, \quad \lambda_2^2 + \mu_2^2 - 1 = \nu_2^2 \quad \text{и} \quad \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 - 1 = \nu_{12},$$

равенством

$$l^2\nu_1^2 + 2lm\nu_{12} + m^2\nu_2^2 = 0 \quad (\nu_1 > 0, \nu_2 > 0). \quad (3')$$

Какой бы ни был пучок, существуют две входящие в его состав прямые (действительные или мнимые сопряженные), которые касаются абсолюта. Эти касательные — мнимые, если $\nu_{12}^2 < \nu_1^2\nu_2^2$; действительные, если $\nu_{12}^2 > \nu_1^2\nu_2^2$; они совпадают, если $\nu_{12}^2 = \nu_1^2\nu_2^2$.

Остановимся на первом случае. Как отмечено в § 42 (ч. I, стр. 336), прямые (1) пересекаются в этом случае внутри абсолюта; точка их пересечения принадлежит геометрии Лобачевского (I), осуществляемой внутри абсолюта. Две мнимые сопряженные касательные образуют угловой абсолют мероопределения в этом пучке (§ 71, рубр. 5). По схеме Кэли прямые пучка образуют угол, определенный формулой (22) (§ 70, стр. 137), где роль $\varnothing$ теперь играет форма $\nu = l^2\nu_1^2 + 2lm\nu_{12} + m^2\nu_2^2$:

$$\cos \theta = \frac{\nu_{12}}{\nu_1\nu_2}, \quad (4)$$

это полностью совпадает с выражением (LXII₂) (ч. I, стр. 337), найденным средствами гиперболической геометрии.

Итак, в геометрии Лобачевского углы имеют эллиптическое мероопределение; ее по принятой нами схеме следует обозначить *HE* — соответственно имеющему в ней место гиперболическому мероопределению расстояний и эллиптическому мероопределению углов; измерение расстояний и углов в геометрии Лобачевского осуществляется по схеме Кэли—Клейна.

Обращаясь теперь к тому случаю, когда $\nu_{12}^2 > \nu_1^2\nu_2^2$, т. е. когда прямые (1) пересекаются вне кругового абсолюта, мы должны относить их к системе *HH* (II₁) или к системе *EH* (II₂). Если эти прямые пересекают абсолют, то они входят в состав системы *HH* (II₁); абсолют мероопределения углов состоит из двух действительных касательных; самое измерение углов выполняется по формуле (6') § 71:

$$\operatorname{ch} \theta = \frac{\nu_{12}}{\nu_1\nu_2}. \quad (4')$$

При этом радикалы, выражаемые через γ_1 и γ_2 , надлежит взять с такими знаками, чтобы произведение $\gamma_1\gamma_2$ имело знак числа γ_{12} , которое в этом случае может быть как положительным, так и отрицательным.

Наконец, две прямые могут принадлежать углу $P_1QP'_2$, смежному с P_1QP_2 (см. выше черт. 91). Измерение углов остается гиперболическим (и формула (4') сохраняет силу), но измерение длин становится эллиптическим (система EH).

Рассмотренные три системы характеризуются тем, что абсолют геометрии служит действительная, не вырождающаяся кривая второго порядка; уравнение этой кривой может быть приведено к виду

$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

или в однородных координатах

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Другими словами, форма, определяющая это коническое сечение, имеет ранг 3 и сигнатуру¹⁾ 1.

4. Геометрия мнимого невырожденного абсолюта (геометрия Римана). В порядке замысла Кэли—Клейна можно строить геометрию также на базе мнимого конического сечения. Если это мнимая невырождающаяся кривая второго порядка, то ее уравнение может быть приведено к виду

$$x^2 + y^2 + 1 = 0, \quad (5)$$

или в однородных координатах

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0; \quad (5a)$$

эта форма имеет ранг 3 и сигнатуру 3.

Так как мнимая кривая не разделяет действительной плоскости на части, то за субстрат этой геометрии следует принять всю проективную плоскость, точнее, совокупность всех действительных точек плоскости; прямыми в этой геометрии будем считать все прямые плоскости, за движения в этой геометрии в соответствии с общим замыслом Кэли—Клейна будем принимать проективные преобразования:

$$x' = \frac{a_1x + a_2y + a_3}{c_1x + c_2y + c_3}, \quad y' = \frac{b_1x + b_2y + b_3}{c_1x + c_2y + c_3}, \quad (6)$$

оставляющие инвариантным уравнение (5). Легко себе уяснить, что для этого необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты преобразования (6) были связаны уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, \quad a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1, \quad a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1, \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0, \quad a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = 0, \quad a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

т. е. составляли ортогональную систему. Любую прямую следует в этой геометрии называть эллиптической, поскольку она встречается абсолют в двух мнимых сопряженных точках.

Пусть $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ — две действительные точки плоскости. Тогда координаты всякой точки прямой M_1M_2 могут быть выражены

¹⁾ Под сигнатурой квадратичной формы, приведенной к каноническому виду, разумеют разность $n - m$, где n — число положительных, m — число отрицательных коэффициентов.

уравнениями:

$$x = \frac{\lambda x_1 + \mu x_2}{\lambda + \mu}, \quad y = \frac{\lambda y_1 + \mu y_2}{\lambda + \mu}. \quad (8)$$

Значения λ и μ , соответствующие точкам пересечения прямой M_1M_2 с абсолютом (5), определяются уравнением

$$(\lambda x_1 + \mu x_2)^2 + (\lambda y_1 + \mu y_2)^2 + (\lambda + \mu)^2 = 0.$$

Принимая эти две мнимые точки за абсолют мероопределения на прямой M_1M_2 , можем сказать, что он определяется уравнением

$$\lambda^2 (x_1^2 + y_1^2 + 1) + 2\lambda\mu (x_1x_2 + y_1y_2 + 1) + \mu^2 (x_2^2 + y_2^2 + 1) = 0. \quad (9)$$

Полагая теперь

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + 1 &= u_1^2, & x_2^2 + y_2^2 + 1 &= u_2^2, & x_1x_2 + y_1y_2 + 1 &= u_{12}, \\ u_1 &> 0, & u_2 &> 0, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

напишем его в виде

$$\lambda^2 u_1^2 + 2\lambda\mu u_{12} + \mu^2 u_2^2 = 0. \quad (9')$$

Теперь тождество, аналогичное (19) из § 70,

$$\begin{aligned} (x_1^2 + y_1^2 + 1)(x_2^2 + y_2^2 + 1) - (x_1x_2 + y_1y_2 + 1)^2 &= \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \end{aligned}$$

показывает, что

$$u_1^2 u_2^2 - u_{12}^2 > 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{|u_{12}|}{u_1 u_2} < 1.$$

Формула Кэли (22) § 70 обнаруживает, что мероопределение расстояний в этом случае будет эллиптическим; расстояние $(M_1M_2) = \rho$ определяется соотношением

$$\cos \rho = \frac{u_{12}}{u_1 u_2}. \quad (11)$$

Аналогично этому, если уравнения

$$\lambda_1 x + \mu_1 y - 1 = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_2 x + \mu_2 y - 1 = 0 \quad (12)$$

выражают две прямые плоскости, то

$$l(\lambda_1 x + \mu_1 y - 1) + m(\lambda_2 x + \mu_2 y - 1) = 0 \quad (13)$$

будет прямая, проходящая через точку пересечения прямых (12); при переменных l и m это будет пучок прямых, проходящих через эту точку. Прямая (13) служит касательной к мнимой окружности (5), если

$$\frac{(l+m)^2}{(l\lambda_1 + m\lambda_2)^2 + (l\mu_1 + m\mu_2)^2} = -1,$$

т. е. если

$$l^2 (\lambda_1^2 + \mu_1^2 + 1) + 2lm (\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + 1) + m^2 (\lambda_2^2 + \mu_2^2 + 1) = 0. \quad (14)$$

Это дает уравнение двух мнимых касательных к абсолюту (5). Принимая их за абсолют мероопределения углов и положив

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + 1 = v_1^2, \quad \lambda_2^2 + \mu_2^2 + 1 = v_2^2, \quad \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + 1 = v_{12}, \quad v_1 > 0, \quad v_2 > 0, \quad (15)$$

напишем уравнение (14) в виде

$$v_1^2 l^2 + 2v_{12} lm + v_2^2 m^2 = 0. \quad (14')$$

Так же как выше, убедимся, что $v_{12}^2 < v_1^2 v_2^2$; поэтому для меры угла между прямыми (12) получим по Кэли

$$\cos \theta = \frac{v_{12}}{v_1 v_2}. \quad (16)$$

Следовательно, мероопределение углов в этой системе тоже является эллиптическим.

Эта геометрия, которую будем числить под номером III или обозначать двумя буквами (EE), была из других соображений указана Риманом и обычно носит его имя. Как и геометрические системы Лобачевского и Евклида, она имеет важное значение.

5. Дифференциальные метрические формы римановой геометрии. Чтобы разыскать основную метрическую форму (квадрат элемента длины) в римановой геометрической системе, положим в формуле (11)

$$x_1 = x, \quad y_1 = y; \quad x_2 = x + dx, \quad y_2 = y + dy.$$

Расстояние между этими точками обозначим через $d\rho$, так что с точностью до бесконечно малых второго порядка относительно $d\rho$

$$\cos d\rho = 1 - \frac{d\rho^2}{2}. \quad (17)$$

С другой стороны,

$$u_{12} = (1 + x^2 + y^2) + x dx + y dy = (1 + x^2 + y^2) (1 + \alpha),$$

где

$$\alpha = \frac{x dx + y dy}{1 + x^2 + y^2},$$

а

$$u_1^2 = 1 + x^2 + y^2, \quad u_2^2 = 1 + (x + dx)^2 + (y + dy)^2 = (1 + x^2 + y^2) (1 + 2\alpha + \beta),$$

где

$$\beta = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2},$$

так что

$$u_1 u_2 = (1 + x^2 + y^2) (1 + 2\alpha + \beta)^{1/2}.$$

Вместе с тем равенство (11) принимает вид

$$1 - \frac{d\rho^2}{2} = (1 + \alpha) (1 + 2\alpha + \beta)^{-1/2}. \quad (18)$$

Пренебрегая бесконечно малыми, порядок которых выше двух, получаем:

$$(1 + 2\alpha + \beta)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} (2\alpha + \beta) + \frac{3}{8} (2\alpha + \beta)^2 \approx 1 - \alpha - \frac{\beta}{2} + \frac{3}{2} \alpha^2;$$

$$(1 + \alpha) (1 + 2\alpha + \beta)^{-1/2} \approx 1 + \frac{\alpha^2 - \beta}{2}. \quad (19)$$

Вместе с тем равенство (18) принимает вид

$$d\rho^2 = \beta - \alpha^2 = \frac{(1 + x^2 + y^2) (dx^2 + dy^2) - (x dx + y dy)^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{(1 + y^2) dx^2 + (1 + x^2) dy^2 - 2xy dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}. \quad (18')$$

Совершенно таким же вычислением можем из формулы (16) получить для элемента угла (т. е. для бесконечно малого угла $d\theta$ между двумя прямыми λ, μ и $\lambda + d\lambda, \mu + d\mu$) выражение

$$d\theta^2 = \frac{(1 + \mu^2) d\lambda^2 + (1 + \lambda^2) d\mu^2 - 2\lambda\mu d\lambda d\mu}{(1 + \lambda^2 + \mu^2)^2}. \quad (20)$$

Отсюда можно сделать двоякий вывод. Во-первых, сличая выражение (18') с основной метрической формой сферы в бельтрамиевых координатах (формула (3) из § 58) при радиусе, равном 1 ($K=1$), мы видим, что геометрия римановой плоскости, по крайней мере локально, не отличается от геометрии сферы. Во-вторых, сличая выражения (18') и (20), мы видим, что одно переходит в другое при замене координат точек (x, y) координатами прямой (λ, μ) ; расстояние между двумя бесконечно близкими точками (x, y) и $(x + dx, y + dy)$ выражается в координатах точки и их дифференциалах так же, как угол между двумя бесконечно близкими прямыми (λ, μ) и $(\lambda + d\lambda, \mu + d\mu)$ в координатах прямой и их дифференциалах. Это при надлежащем развитии получающихся отсюда выводов приводит к так называемой «двойственности» в построении метрической геометрии (см. по этому поводу В. Ф. Каган [8], т. II, гл. XVIII, где далеко развиты соображения, базирующиеся на аналогии между формами (18') и (20)).

6. Сравнение формул для измерения расстояний и углов в геометрических системах I, Π_1 , Π_2 и III. При вычислении расстояния между двумя точками M_1, M_2 в геометрии Лобачевского *HE*, построенной внутри кругового абсолюта, мы разыскиваем точки P_1, P_2 пересечения прямой M_1M_2 с абсолютом и вычисляем ангармоническое отношение $\{P_1P_2, M_1M_2\}$; в бельтрамиевых координатах оно выражается числом

$$\frac{1 + \sqrt{1 - \tau^2}}{1 - \sqrt{1 - \tau^2}}, \quad (21)$$

где

$$\tau^2 = \frac{z_1^2 z_2^2}{z_{12}^2} = \frac{(1 - x_1^2 - y_1^2)(1 - x_2^2 - y_2^2)}{(1 - x_1 x_2 - y_1 y_2)^2} \quad (22)$$

(ср. выше § 71, формула (11')). При этом выражение (21) представляет действительное число, большее 1; число, пропорциональное его логарифму, мы принимаем за расстояние s между точками M_1 и M_2 :

$$\rho = \frac{k}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \tau^2}}{1 - \sqrt{1 - \tau^2}}, \quad \text{ch } \frac{\rho}{k} = \frac{1}{\tau}. \quad (23)$$

Это выражение совпадает с формулой (LIII) (см. ч. I, § 42, стр. 332). Число k зависит от выбора единицы меры; $-\frac{1}{k^2}$ есть кривизна метрической формы двумерной геометрии I.

При переходе к эллиптическому (риманову) мероопределению на плоскости действительный круг $x^2 + y^2 - 1 = 0$ следует заменить мнимым кругом $x^2 + y^2 + 1 = 0$; точки P_1, P_2 пересечения этого круга с прямой M_1M_2 становятся мнимыми. Не приводя здесь полностью соответствующих вычислений, заметим, что в этом случае число (22) заменяется на

$$\tau^2 = \frac{(1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)}{(1 + x_1 x_2 + y_1 y_2)^2}. \quad (22')$$

Из тождества

$$(1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2) - (1 + x_1x_2 + y_1y_2)^2 = \\ = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (x_1y_2 - y_1x_2)^2$$

усматриваем, что теперь $\tau^2 > 1$. Анггармоническое отношение (21) становится комплексным числом с модулем, равным 1. Его логарифм является чисто мнимым числом, и, чтобы расстояние ρ между двумя точками M_1, M_2 выражалось все же действительным числом, мы вынуждены положить

$$\rho = \frac{k}{2i} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \tau^2}}{1 - \sqrt{1 - \tau^2}} \text{ или } \cos \frac{\rho}{k} = \frac{1}{\tau}. \quad (24)$$

Таким образом переход от гиперболического мероопределения к эллиптическому сводится к тому, что гиперболическая функция $\text{sh } \frac{\rho}{k}$ в выражении расстояния между двумя точками заменяется тригонометрической функцией $\cos \frac{\rho}{k}$.

Вычисление углов по схеме Кэли—Клейна выполняется следующим образом. При действительном круговом абсолюте для установления угла ϑ между двумя прямыми m_1, m_2

$$\lambda_1 x + \mu_1 y = 1 \text{ и } \lambda_2 x + \mu_2 y = 1,$$

пересекающимися в точке M внутри абсолюта, из точки M проводятся две (мнимые) касательные p_1, p_2 к абсолюту и составляется анггармоническое отношение $\{p_1 p_2, m_1 m_2\}$. Оно тоже выражается формулой, аналогичной (21):

$$\frac{1 + \sqrt{1 - \sigma^2}}{1 - \sqrt{1 - \sigma^2}}; \quad (25)$$

здесь

$$\sigma^2 = \frac{\nu_1^2 \nu_2^2}{\nu_{12}^2} = \frac{(\lambda_1^2 + \mu_1^2 - 1)(\lambda_2^2 + \mu_2^2 - 1)}{(\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 - 1)^2}. \quad (25')$$

Так как, однако,

$$\nu_1^2 = \lambda_1^2 + \mu_1^2 - 1 > 0, \quad \nu_2^2 = \lambda_2^2 + \mu_2^2 - 1 > 0,$$

а при условии пересечения прямых m_1, m_2 внутри абсолюта имеет место неравенство (LXI₁) (см. ч. I, стр. 336), то $\sigma^2 > 1$. Поэтому выражение (25) есть комплексное число, равное по модулю единице, и мы можем положить

$$\vartheta = \frac{k}{2i} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \sigma^2}}{1 - \sqrt{1 - \sigma^2}}, \quad \cos \frac{\vartheta}{k} = \frac{1}{\sigma} = \frac{\nu_{12}}{\nu_1 \nu_2}; \quad (26)$$

эта формула дает то же выражение для величины угла, что и формула (LXII₂) (см. ч. I, стр. 337). Если же прямые m_1, m_2 пересекаются вне абсолюта, как это имеет место в системах HH и EH , то число σ , выражаемое формулой (25'), как можно показать, меньше 1. Поэтому в этих геометрических системах следует положить

$$\text{ch } \frac{\vartheta}{k} = \frac{1}{\sigma}.$$

Итак, мы видим, что и переход от эллиптического мероопределения углов к гиперболическому мероопределению приводит к замене тригоно-

метрических функций гиперболическими. Подмеченные в этой рубрике закономерности являются общими и находят отражение во многих формулах геометрий I, II₁, II₂ и III. С этой точки зрения весьма поучительным представляется сравнение формул тригонометрии треугольника в этих трех геометриях. Однако мы вынуждены отказаться от развития тригонометрии всех наших геометрий, так как это потребовало бы слишком много места.

§ 78. ГЕОМЕТРИИ КЭЛИ—КЛЕЙНА С ВЫРОЖДЕННЫМ АБСОЛЮТОМ

1. Геометрические системы с аффинной группой. Четыре геометрические системы, рассмотренные в предыдущем параграфе, характеризуются тем, что абсолютом для них служит невырожденное коническое сечение. Соответственно этому проективные преобразования, выражающие движения в каждой из этих геометрических систем, не имеют общей инвариантной прямой, т. е. не вырождаются в аффинные преобразования (которые можно определить как проективные преобразования, оставляющие на месте определенную прямую проективной плоскости, условно называемую «бесконечно удаленной» прямой). Обратимся теперь к геометрическим системам, в которых роль движений играют аффинные преобразования.

Общая группа аффинных преобразований плоскости выражается уравнениями:

$$x' = a_1x + a_2y + a_3, \quad y' = b_1x + b_2y + b_3, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0; \quad (1)$$

она зависит от шести параметров $a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3$. Между тем группы движений в каждой из ранее рассмотренных геометрических систем зависят всего от трех параметров; вообще, если геометрическая система на плоскости аналогична евклидовой или гиперболической геометрии в том смысле, что в ней существует единственное «движение», переводящее данную точку, заданную в ней прямую и одну из двух ограниченных этой прямой полуплоскостей, в другие произвольно заданные точку, заданную в ней прямую и ограниченную этой прямой полуплоскость, то группа «движений» геометрической системы будет зависеть от трех параметров¹⁾. Поэтому занимаясь геометрическими системами, в которых «движениями» являются аффинные преобразования, мы должны тем или иным способом выделить трехпараметрические подгруппы общей аффинной группы. Ясно, что это требует еще каких-то дополнительных ограничений.

Все аффинные преобразования оставляют инвариантной одну и ту же прямую проективной плоскости — «бесконечно удаленную» прямую.

¹⁾ Действительно, назовем «репером» в этой геометрической системе точку, заданную в ней прямую и одну из ограниченных этой прямой полуплоскостей; какой-нибудь один репер назовем «начальным». Так как существует единственное «движение», переводящее начальный репер в какой-либо другой, то совокупность всех движений естественно отображается на множество реперов; так как множество всех реперов плоскости, очевидно, зависит от трех параметров, то и множество всех движений должно зависеть от трех параметров. Это рассуждение полностью сохраняет свою силу и в том случае, когда «точками» нашей геометрической системы объявляется лишь часть точек плоскости (как в геометрических системах I, II₁, II₂ предыдущего параграфа) или «прямыми» объявляется лишь часть прямых, проходящих через «точки» системы (как в системах II₁ и II₂).

Каждое аффинное преобразование оставляет на месте две точки этой прямой — действительные различные, совпадающие или комплексные сопряженные. Действительно, «точка бесконечно удаленной прямой» представляет собой с точки зрения аффинной геометрии просто направление, которое характеризуется отношением $\frac{dy}{dx}$; для всех прямых $y = f(x)$ ($f(x)$ — линейная функция), имеющих это направление, отношение $\frac{dy}{dx}$ сохраняет одно и то же значение. Но из уравнений (1) следует

$$dx' = a_1 dx + a_2 dy, \quad dy' = b_1 dx + b_2 dy. \quad (2)$$

Отсюда если через $\dot{y}$ и $\dot{y}'$ обозначить производные $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dy'}{dx'}$, то получим:

$$\dot{y}' = \frac{b_1 + b_2 \dot{y}}{a_1 + a_2 \dot{y}}. \quad (3)$$

Поэтому значение $\dot{y}$, отвечающее инвариантной точке «бесконечно удаленной» прямой (т. е. инвариантному направлению аффинного преобразования), определяется из квадратного уравнения

$$\dot{y} = \frac{b_1 + b_2 \dot{y}}{a_1 + a_2 \dot{y}}, \quad (4)$$

или

$$a_1 \dot{y} + a_2 \dot{y}^2 = b_1 + b_2 \dot{y}, \quad (4')$$

всегда имеющему два (действительные, совпадающие или комплексные) корня.

Рассмотрим теперь геометрические системы, в которых движения выражаются аффинными преобразованиями, оставляющими инвариантными фиксированные точки бесконечно удаленной прямой (действительные различные, совпадающие или комплексные сопряженные), т. е. системы, абсолютom которых служит пара точек прямой (прямую надо специально указывать, если точки совпадают). При этом мы придем к нескольким новым интересным и важным геометриям¹⁾.

2. Евклидова геометрия в системе Кэли—Клейна. Мы остановимся сначала на том случае, когда аффинное преобразование оставляет в покое две мнимые сопряженные бесконечно удаленные точки; таковые мы можем всегда привести к тому, что $\dot{y} = \pm i$ (это значит, что действительным аффинным преобразованием всегда можно достигнуть того, что пучки, для которых $\dot{y} = \alpha \pm \beta i$, перейдут в пучки, для которых $\dot{y} = \pm i$).

¹⁾ Мы ставим своей целью лишь познакомить читателя с идеями Кэли—Клейна, но не стремимся систематически развить эти идеи. Поэтому в нашем кратком изложении выбор абсолютom соответствующих геометрических систем может показаться довольно случайным. В плане идей Клейна следовало бы рассуждать следующим образом: вырожденные конические сечения на плоскости представляют собой пары прямых—действительных различных, комплексных сопряженных (пересекающихся в действительной точке) или совпадающих, двойственные им образы представляют собой пары точек. Комбинируя наиболее естественным образом вырожденные конические сечения и двойственные им образы, мы придем как раз к абсолютom перечисленных ниже систем IV₁, IV₂, V₁, V₂ и VI. См. по этому поводу обстоятельную книгу Клейна [70].

Уравнение (4') принимает при этом вид:

$$\pm (a_1 - b_2)i - (a_2 + b_1) = 0,$$

а следовательно, если коэффициенты преобразования действительны, то $a_1 = b_2$, $a_2 = -b_1$; вместе с тем преобразование (1) принимает вид:

$$x' = a_1x + a_2y + a_3, \quad y' = -a_2x + a_1y + b_3; \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{vmatrix} = a_1^2 + a_2^2 \neq 0.$$

Мы можем положить

$$a_1 = c \cos \varphi, \quad a_2 = -c \sin \varphi, \quad c > 0.$$

Наше аффинное преобразование принимает вид:

$$x' = c(x \cos \varphi - y \sin \varphi) + a, \quad y' = c(x \sin \varphi + y \cos \varphi) + b. \quad (5)$$

Совокупность всех таких преобразований, соответствующих разным значениям a , b , φ и c , представляет собой четырехчленную группу преобразований подобия. Сохраняя за c лишь значение 1 (ср. выше, § 62, рубр. 7), мы получаем группу евклидовых движений:

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi + a, \quad y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi + b. \quad (6)$$

Точки, в которых прямые пучка $\dot{y} = \pm i$, т. е. прямые $y = \pm xi + a$ ($a = \alpha + \beta i$), встречаются бесконечно удаленную прямую, общие бесконечно удаленные точки этого пучка называют циклическими точками плоскости. Абсолют в рассматриваемом случае состоит из двух циклических точек; поскольку циклические точки остаются инвариантными, уже неизбежно остается в покое вся бесконечно удаленная прямая плоскости, как это и имеет место в движениях евклидовой геометрии. Геометрия Кэли—Клейна, для которой абсолютом служат циклические точки плоскости, сводится к геометрии Евклида, которая, таким образом, занимает определенное место в системе Кэли—Клейна. Нужно, однако, давать себе ясный отчет в том, что абсолют, состоящий из двух циклических точек плоскости, строго говоря, определяет четырехчленную группу подобий (5); переход к евклидовой геометрии требует добавочного допущения — выделения трехчленной подгруппы движений при помощи условия $c = 1$.

В нашей классификации мы будем обозначать евклидову геометрию номером IV_1 . Мы хорошо знаем, что в ней мероопределение расстояний является параболическим, а мероопределение углов — эллиптическим; соответственно этому евклидову геометрию целесообразно также обозначать символом PE . Это видно также из характера инвариантных образов; если возьмем любые две точки, то прямая, их соединяющая, пересекает бесконечно удаленную прямую (абсолют) в одной точке; мероопределение расстояний на прямой поэтому параболическое. Квадрат расстояния между двумя точками выражается евклидовой формулой

$$\rho^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

— инвариантом преобразования (6). Если обе точки лежат на оси абсцисс, то расстояние между ними выразится разностью $x_2 - x_1$; это соответствует формуле Кэли для параболического мероопределения на прямой (§ 71, конец рубр. 3).

Две прямые, выходящие из какой-либо (действительной) точки M плоскости и проходящие через циклические точки, — мнимые сопряжен-

ные; приняв их в качестве абсолюта для измерения углов в пучке прямых, выходящих из точки M , мы приходим к эллиптическому мероопределению для углов. Таким образом угол между прямыми m_1, m_2 евклидовой плоскости определяется с помощью ангармонического отношения четырех прямых: прямых m_1, m_2 и прямых p_1, p_2 , соединяющих точку пересечений m_1, m_2 с циклическими точками плоскости. Это определение угла было впервые указано Лагером (E. Laguerre [71]).

3. Псевдоевклидова геометрия. Обращаемся теперь к аффинным преобразованиям, которые оставляют на бесконечно удаленной прямой инвариантными какие-либо две фиксированные различные действительные точки. Прямая, соединяющая какие-либо две (действительные) точки плоскости, встречает бесконечно удаленную прямую в одной точке; абсолют соответствующего линейного мероопределения будет параболическим и, следовательно, мероопределение расстояний будет являться параболическим. С другой стороны, прямые, идущие из действительной точки M плоскости к инвариантным точкам бесконечно удаленной прямой, действительны; приняв их за абсолют, мы получим гиперболическое мероопределение углов.

За неподвижные точки на бесконечно удаленной прямой принимаем те, которые соответствуют значениям $\dot{y} = \pm 1$; в евклидовой плоскости, служащей интерпретацией нашей геометрии, это суть точки пересечения бесконечно удаленной прямой с прямыми, образующими с осью абсцисс с той или с другой стороны углы в 45° . Уравнение (4) в этом случае дает

$$\pm 1 = \frac{b_1 \pm b_2}{a_1 \pm a_2}. \quad (7)$$

Разбивая это уравнение согласно знакам на два, получим:

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2, \quad -a_1 + a_2 = b_1 - b_2,$$

откуда

$$a_1 = b_2, \quad a_2 = b_1.$$

Уравнения преобразования (1) принимают вид:

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + a_2y + a_3, & \Delta &= a_1^2 - a_2^2 \neq 0; \\ y' &= a_2x + a_1y + b_3, \end{aligned} \quad (8)$$

полагая здесь (при $|a_1| > |a_2|$)

$$a_1 = c \operatorname{ch} \psi, \quad a_2 = c \operatorname{sh} \psi,$$

получаем:

$$c^2 = a_1^2 - a_2^2,$$

а уравнения преобразования (8) окончательно принимают вид:

$$x' = c(x \operatorname{ch} \psi + y \operatorname{sh} \psi) + a, \quad y' = c(x \operatorname{sh} \psi + y \operatorname{ch} \psi) + b. \quad (9)$$

Группа преобразований и в этом случае будет четырехчленной; полагая $c=1$, приходим к ее трехчленной подгруппе, преобразования которой и принимаем за движения в нашей геометрической системе:

$$x' = x \operatorname{ch} \psi + y \operatorname{sh} \psi + a, \quad y' = x \operatorname{sh} \psi + y \operatorname{ch} \psi + b. \quad (10)$$

Они дают для двух точек инвариант

$$(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2, \quad (11)$$

который и принимается за квадрат расстояния между точками.

В этой геометрии через каждую точку x_0 , y_0 плоскости проходят две прямые:

$$x - x_0 = \pm (y - y_0) \quad (12)$$

(в евклидовой плоскости это прямые, параллельные биссектрисам углов между координатными осями); расстояние между двумя точками на каждой из этих прямых равно нулю. Это изотропные прямые плоскости; они содержат одну или вторую из неподвижных точек бесконечно удаленной прямой. В каждой точке M изотропные прямые образуют две пары вертикальных углов. При этом выражение (11), составленное для двух точек M и M' , будет равно нулю, если M' лежит на изотропной прямой, проходящей через точку M ; в противном случае оно положительно или отрицательно в зависимости от того, в какой из двух пар вертикальных углов лежит точка M' . Пары точек, таким образом, могут быть разбиты на три категории: для пары точек одной категории выражение (11) имеет положительное значение, для пары точек другой категории — отрицательное (и здесь приходится считать, что расстояние между точками является мнимым или что выражение (11) противоположно по знаку квадрату расстояния между точками); для пары точек, лежащих на изотропной линии, оно равно нулю.

Эту геометрию мы будем обозначать номером IV_2 и называть псевдоевклидовой. Такое название обуславливается выражением (11) расстояния между двумя точками. По характеру мероопределений расстояний и углов ее следует обозначить через PH .

4. Системы, двойственные евклидовой и псевдоевклидовой геометрии.

В евклидовой и псевдоевклидовой геометрии роль абсолюта играют две точки, действительные или мнимые сопряженные, они отнесены на бесконечно удаленную прямую, которая вместе с ними остается инвариантной. В порядке двойственности им соответствуют две системы, в которых абсолютом служат две прямые, действительные или мнимые сопряженные; вместе с ними инвариантной остается точка их пересечения (всегда действительная).

Эту точку пересечения мы можем проективным преобразованием перевести в любую бесконечно удаленную точку. Мы возьмем ее на оси ординат; в том и в другом из этих случаев абсолютом по существу служат две параллельные прямые, мнимые (геометрическая система V_1) или действительная (система V_2). Рассмотрим сначала систему V_2 . Если M и M' — две действительные точки плоскости, то прямая MM' , вообще говоря, пересекает абсолют в двух действительных точках P_1, P_2 . Таким образом для определения расстояния между двумя точками M_1, M_2 мы имеем линейный абсолют, состоящий из двух действительных точек P_1, P_2 ; он определяет гиперболическое мероопределение расстояний на прямой. В том частном случае, когда прямая MM' параллельна прямой, составляющим абсолют, она их встречает в одной бесконечно удаленной точке; это прямая изотропная; расстояние между каждыми двумя точками изотропной прямой равно нулю (см. ниже, стр. 227). Таким образом в системе V_2 имеется один пучок изотропных прямых;

в нашей интерпретации, где прямые абсолюта параллельны, это будет пучок параллельных прямых.

Для измерения углов, имеющих вершину в точке M , абсолютом должна служить прямая, идущая от точки M к бесконечно удаленной точке P ; абсолют вырождающийся; измерение углов параболическое. Система должна быть обозначена символом HP ; ее можно рассматривать как двойственную псевдоевклидовой.

В случае, когда абсолютом служит пара сопряженных мнимых прямых (система V_1), прямая MM' встречает абсолют в двух мнимых сопряженных точках; мероопределение расстояний — эллиптическое. Для мероопределения углов, имеющих вершину в точке M , абсолютом мероопределения пучка прямых служит одна прямая MP ; этому соответствует параболическое мероопределение углов. Система должна быть обозначена через EP ; ее можно рассматривать как двойственную евклидовой геометрии.

5. Аналитические вычисления, относящиеся к системе V_2 . За действительные параллельные прямые, составляющие абсолют системы V_2 , примем прямые

$$x^2 - 1 = 0, \quad (13)$$

что не нарушает общности наших рассуждений. Прямая, проходящая через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) ,

$$x = \frac{\lambda x_1 + \mu x_2}{\lambda + \mu}, \quad y = \frac{\lambda y_1 + \mu y_2}{\lambda + \mu}, \quad (14)$$

встречает прямые абсолюта в точках, для которых

$$(\lambda x_1 + \mu x_2)^2 = (\lambda + \mu)^2, \quad (15)$$

или

$$\lambda^2 (1 - x_1^2) + 2\lambda\mu (1 - x_1 x_2) + \mu^2 (1 - x_2^2) = 0. \quad (15')$$

Дискриминант формы от переменных λ, μ , составляющей левую часть этого уравнения, равный

$$(1 - x_1 x_2)^2 - (1 - x_1^2)(1 - x_2^2) = (x_1 - x_2)^2,$$

имеет положительное значение; расстояние между точками определяется по формуле

$$\operatorname{ch} \rho = \frac{\pm (1 - x_1 x_2)}{\sqrt{(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)}}. \quad (16)$$

Легко выяснить, когда в этом выражении следует взять знак «плюс» и когда знак «минус». Абсолют делит плоскость на две области: одна из них — это часть плоскости, содержащаяся между параллелями, и вторая — часть плоскости, лежащая вне их. Если обе точки M_1 и M_2 лежат между параллелями или обе расположены вне их (т. е. в одной из двух областей, на которые расщепляется плоскость), то выражение, стоящее под радикалом, имеет положительное значение; в противном случае подкоренное выражение является отрицательным и расстояние между точками M_1, M_2 следует считать несуществующим. Что касается числителя, то и он имеет положительное значение, когда точки M_1 и M_2 лежат между параллелями или обе вне параллелей по разные

стороны от них; формула (16) при этом должна быть написана в виде:

$$\operatorname{ch} \rho = \frac{1 - x_1 x_2}{\sqrt{(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)}}. \quad (16')$$

Если же точки M_1 и M_2 лежат вне параллелей по одну сторону от них, то в выражении (16) $1 - x_1 x_2$ имеет отрицательное значение и формула (16) должна быть написана в виде:

$$\operatorname{ch} \rho = \frac{x_1 x_2 - 1}{\sqrt{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)}}. \quad (16'')$$

В геометрической системе V_2 целесообразно ограничиться рассмотрением точек, заключенных в полосе между параллельными прямыми.

Если две точки лежат на одной прямой, параллельной оси ординат (т. е. если $x_1 = x_2$), то формула (16') или (16'') дает $\operatorname{ch} \rho = 1$, $\rho = 0$. Прямые, параллельные оси ординат (параллельные абсолюту), суть изотропные прямые; две изотропные прямые находятся на равных расстояниях одна от другой в том смысле, что расстояние любой точки одной из них от любой же точки другой имеет одно и то же значение (равное расстоянию их проекций на оси абсцисс).

Для определения величины угла между прямыми в соответствии с общими соображениями, изложенными в § 71, рубр. 5, предположим, что через одну точку, лежащую внутри полосы, ограниченной нашими параллельными прямыми, проходят прямые

$$\lambda_1 x + \mu_1 y = 1 \quad \text{и} \quad \lambda_2 x + \mu_2 y = 1. \quad (17)$$

Всякая прямая, проходящая через точку их пересечения, выражается уравнением

$$l(\lambda_1 x + \mu_1 y - 1) + m(\lambda_2 x + \mu_2 y - 1) = 0, \quad (18)$$

или

$$(l\lambda_1 + m\lambda_2)x + (l\mu_1 + m\mu_2)y - (l + m) = 0. \quad (18')$$

Чтобы разыскать точки встречи этой прямой с абсолютом $x^2 = 1$, исключаем из этих уравнений x для определения соответствующих значений y ; в результате получаем для y уравнение

$$(l\lambda_1 + m\lambda_2)^2 = \{(l + m) - (l\mu_1 + m\mu_2)y\}^2, \quad (19)$$

которое имеет двукратный корень (т. е. прямая (18) является «касательной к абсолюту» только, если

$$(l\lambda_1 + m\lambda_2)^2 = 0.$$

Это дает согласно общим соображениям Кэли (формула (21), § 71, стр. 146) меру угла, пропорциональную разности

$$\frac{\mu_2}{\lambda_2} - \frac{\mu_1}{\lambda_1}. \quad (20)$$

К этому сводится в рассматриваемом случае параболическое мероопределение углов. Когда прямая поворачивается от положения, параллельного оси абсцисс, до положений, параллельного оси ординат, то угол поворота возрастает от нуля до бесконечности.

6. Вычисления, относящиеся к системе V_1 . Теперь остановимся на той схеме, в которой абсолют состоит из двух мнимых сопряженных прямых, общая точка которых лежит на бесконечно удаленной

прямой; иначе говоря, действительный абсолют $x^2 - 1 = 0$ заменяется мнимым $x^2 + 1 = 0$. В этом случае абсолют не делит действительной плоскости на части; субстратом геометрии является вся евклидова плоскость.

Прямая, соединяющая действительные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) встречает абсолют $x^2 + 1 = 0$ в точках, в которых

$$(\lambda x_1 + \mu x_2)^2 + (\lambda + \mu)^2 = 0. \quad (21)$$

Это уравнение отличается от уравнения (15) только знаком второй части и в раскрытом виде может быть записано так:

$$\lambda^2(1 + x_1^2) + 2\lambda\mu(1 + x_1x_2) + \mu^2(1 + x_2^2) = 0. \quad (22)$$

Его дискриминант

$$(1 + x_1x_2)^2 - (1 + x_1^2)(1 + x_2^2) = -(x_2 - x_1)^2 \quad (23)$$

всегда имеет отрицательное значение; это соответствует тому, что прямая встречает абсолют в двух мнимых сопряженных точках. Расстояние определяется по формуле

$$\cos \rho = \frac{\pm(1 + x_1x_2)}{\sqrt{(1 + x_1^2)(1 + x_2^2)}}. \quad (24)$$

Это мероопределение расстояний эллиптическое; расстояние определено двузначно и обращается в нуль (или в π), когда $x_2 = x_1$; но это здесь не означает, что точки совпадают, а лишь что две точки лежат на одной прямой, параллельной оси ординат; эти прямые и в этом случае являются изотропными.

Обращаясь теперь к мероопределению углов, ищем пересечение абсолюта $x^2 + 1 = 0$ с любой прямой (18) или (18'); для определения y получаем уравнение, которое отличается от уравнения (19) только знаком второй части:

$$(l\lambda_1 + m\lambda_2)^2 + [(l + m) - (l\mu_1 + m\mu_2)y]^2 = 0. \quad (25)$$

Таким образом

$$l\lambda_1 + m\lambda_2 = 0, \quad (l\mu_1 + m\mu_2)y = l + m.$$

Соответствующая прямая единственная; она параллельна оси абсцисс и проходит от нее на расстоянии

$$y = \frac{l + m}{l\mu_1 + m\mu_2}.$$

Мероопределение углов и в этом случае параболическое; угловой абсолют выражается уравнением

$$(l\lambda_1 + m\lambda_2)^2 = 0.$$

Мера углов выражается разностью

$$\frac{\lambda_2}{\mu_2} - \frac{\lambda_1}{\mu_1}. \quad (26)$$

7. Система с дважды параболической метрикой. Обратимся теперь к геометрической системе VI, в основе которой лежит группа аффинных преобразований, оставляющих инвариантной двойную точку бесконечно удаленной прямой. В этом случае уравнение (4') на стр. 222 должно иметь

кратные корни: следовательно,

$$(a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 = 0.$$

Если принять, что инвариантная точка бесконечно удаленной прямой отвечает направлению оси ординат, то уравнение (4') должно будет иметь двойной корень $\frac{1}{y} = 0$; это отвечает тому, что в уравнении (4') $a_2 = 0$, $a_1 = b_2$. Таким образом мы и здесь приходим к четырехчленной группе аффинных преобразований:

$$x' = a_1x + a_3, \quad y' = b_1x + a_1y + b_3;$$

ее трехчленную подгруппу, отвечающую значению $a_1 = 1$, т. е. группу

$$x' = x + a_3, \quad y' = y + b_1x + b_3,$$

принимаем за движения в геометрической системе VI. Любая прямая пересекает бесконечно удаленную прямую в единственной точке; поэтому абсолют мероопределения длин на прямой будет представлять собой двойную точку — мероопределение длин будет параболическим. Расстояние между двумя точками в нашей интерпретации будет равно $x_2 - x_1$; для прямых, параллельных оси ординат, расстояние между каждыми двумя их точками будет равно нулю (изотропные прямые, проходящие через инвариантную точку бесконечно удаленной прямой). Точно так же абсолют мероопределения углов в пучке с вершиной M будет являться (двойная) прямая, соединяющая M с инвариантной точкой (в нашей интерпретации — прямая $x = \text{const}$). Мероопределение углов тоже будет параболическим; мера угла выражается разностью $\frac{\lambda_2}{\mu_2} - \frac{\lambda_1}{\mu_1}$. По принятой нами системе обозначений такую геометрию VI следует обозначать буквами PP .

8. Заключение. Мы установили девять разновидностей неевклидовой геометрии в пространстве двух измерений; мы дали их отображения (осуществления, модели, интерпретации) на евклидовой плоскости¹⁾. Первые три системы (геометрия Лобачевского (HE) и ее ближайшие разновидности (HH) и (EH)) осуществляются при действительном невырожденном абсолютe внутри или вне его; система EE строится при мнимом абсолютe, а абсолют остальных пяти геометрий можно рассматривать как вырожденное коническое сечение. Окончательно мы приходим к следующей таблице:

I Геометрия Лобачевского (HE); действительный невырожденный абсолют; внутренняя его область.

II₁ Геометрия с гиперболическим мероопределением как расстояний, так и длин (HH); действительный невырожденный абсолют; внешняя его область; прямые — гиперболические прямые.

¹⁾ Мы отличаем отображение геометрии от самой геометрии; собственно геометрия (геометрическая система) определяется своей аксиоматикой, из которой она синтетически выводится. Интерпретации — это отдельные формы ее осуществления; одна геометрическая система может иметь ряд различных интерпретаций. От Бельтрами исходит самое название — интерпретация; мы видели, что он дал интерпретацию двумерной геометрии Лобачевского на псевдосферической поверхности и даже наметил другую интерпретацию внутри круга в евклидовой плоскости. Последняя интерпретация была полностью осуществлена Клейном, а затем была им развернута на основе идей Кэли с выбором того или иного абсолютa; эти интерпретации обстоятельно изложены в §§ 63—65.

II₂ Геометрия, двойственная геометрии Лобачевского (EH); действительный невырожденный абсолют; внешняя его область; прямые—эллиптические прямые.

III Геометрия Римана (EE); абсолютом служит мнимая невырождающаяся кривая второго порядка.

IV₁ Геометрия Евклида (PE); абсолютом служат две циклические точки плоскости—мнимые сопряженные точки бесконечно удаленной прямой.

IV₂ Псевдоевклидова геометрия (PH); абсолютом служат две действительные бесконечно удаленные точки плоскости.

V₁ Геометрия, двойственная евклидовой геометрии (EP); абсолютом служат две параллельные мнимые сопряженные прямые.

V₂ Геометрия, двойственная псевдоевклидовой геометрии (HP); абсолютом служат две действительные параллельные прямые.

VI Геометрия с параболическим мероопределением как расстояний, так и длин (PP); абсолютом служит бесконечно удаленная прямая с выделенной действительной точкой на ней.

В трехмерном пространстве к прежним объектам первой ступени, подлежащим измерению (к прямолинейным отрезкам и линейным углам), присоединяется еще один объект—двугранные углы. Так как каждый из этих объектов может допускать тройное мероопределение (эллиптическое, гиперболическое или параболическое), то здесь возможны 27 комбинаций, т. е. двадцать семь различных геометрий. В указанном выше сочинении Клейна [70] важнейшие типы этих систем перечислены, хотя и не разобраны до конца. Приводить это перечисление здесь, конечно, нецелесообразно. Полагаем, что идея, по которой эти системы различают и классифицируют, достаточно выяснена.

Однако Клейн неоднократно указывал, что дело отнюдь не в одном только перечислении возможных систем; следует действительно построить геометрию каждой из этих систем, установить ее аксиоматику, из этой аксиоматики дедуктивно вывести самую геометрию каждой системы—как геометрию положения, так и метрику. Но это удовлетворительно в необходимом объеме еще не выполнено и по настоящее время.

ГЛАВА ВОСЕМНАДЦАТАЯ

ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО В ИНТЕРПРЕТАЦИИ ПУАНКАРЕ

§ 79. КРУГОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

1. **Группа круговых преобразований плоскости.** Замысел Клейна, лежащий в основе построенных им интерпретаций неевклидовой геометрии (для простоты остановимся на двумерной геометрии, на неевклидовой планиметрии), заключается, как мы видели (см. гл. XIII), в следующем. Из восьмичленной группы проективных преобразований плоскости как совокупности точек или прямых выделяется трехчленная подгруппа, оставляющая инвариантным некоторое коническое сечение—абсолют. Та или иная область, выделяемая абсолютом, принимается за субстрат геометрии, а группа проективных преобразований, оставляющих абсолют инвариантным,—за совокупность имеющих в ней место движений и отражений. По методу Кэли устанавливается соответствующая метрика. Осуществление этого замысла привело не только к полному доказательству логической правильности геометрии Лобачевского, но и к построению и развитию других разновидностей двумерной неевклидовой геометрии и к их классификации (§§ 77, 78). Роль прямых во всех этих геометриях играли обыкновенные прямые (прямые евклидовой плоскости), которые остаются инвариантными при проективных преобразованиях, осуществляющих движения и отражения.

В 80-х годах прошлого столетия французский геометр А. Пуанкаре [72] дал другую интерпретацию неевклидовой геометрии, прежде всего двумерной, развитие которой привело к очень важному приложению геометрии Лобачевского в теории функций комплексной переменной, именно, к выяснению и решению важнейших проблем теории автоморфных функций. В то время как в построениях Клейна основную группу преобразований составляют коллинеации, в геометрии Пуанкаре эту роль играют круговые преобразования, т. е. такие, которые преобразовывают круги в круги же.

Теория круговых преобразований была развита Мёбиусом (A. Möbius) в 1852 г.; в четырех мемуарах, опубликованных им в промежутке от 1852 до 1856 г. ([73], [74], [75], [76]), он дал как элементарную геометрическую, так и простую аналитическую их теорию. Его замысел, может быть еще недостаточно оформленный, заключался в том, что преобразование комплексной плоскости, которое аналитически выражается так же, как в действительных переменных, выражается проективное преобразование прямой, т. е. дробнолинейное преобразование комплексной переменной геометрически всегда представляет собой круговое преобразование плоскости. Точнее, если точку на плоскости будем задавать

комплексным числом $z = x + iy$, где x и y суть абсцисса и ордината этой точки в ортогональной декартовой координации, то преобразование

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad (1)$$

переводит все окружности плоскости z в окружности же, с той лишь оговоркой, что в число окружностей должны быть включены также прямые, как их вырождения (окружности бесконечно большого радиуса). Коэффициентами a, b, c, d при этом могут служить произвольные комплексные числа, для которых определитель

$$\Delta = ad - bc \quad (1')$$

отличен от нуля (если $\Delta = 0$, то правая часть равенства (1), как легко убедиться, имеет постоянное значение и равенство не выражает поэтому взаимно однозначного преобразования плоскости). В частности, если и коэффициенты a, b, c, d и переменное z имеют действительные значения (например, $z = x$), то равенство (1) выражает проективное преобразование прямой (оси абсцисс).

Формулированное выше предложение имеет для дальнейшего изложения основное значение. По существу, есть только два доказательства этого предложения: одно алгебраическое, другое имеет более геометрический характер. Соображения, входящие в состав как одного, так и другого доказательства, нам будут очень полезны; мы оба доказательства здесь приведем. Предварительно заметим, что совокупность преобразований (1) образует группу. В самом деле, если к преобразованию S (1) присоединяется преобразование S'

$$z'' = \frac{a'z' + b'}{c'z' + d'}, \quad (2)$$

то составленное из них преобразование — их произведение $S'S$ выражается равенством

$$z'' = \frac{a''z + b''}{c''z + d''}, \quad (3)$$

где

$$a'' = aa' + cb', \quad b'' = ba' + db', \quad c'' = ac' + cd', \quad d'' = bc' + dd'. \quad (3')$$

Преобразование S^{-1} , обратное (1), имеет вид:

$$z = \frac{-dz' + b}{cz' - a}. \quad (4)$$

При этом неравенство нулю определителей преобразований S и S' влечет за собой неравенство нулю определителей преобразований S^{-1} и S'' , так как определитель обратного преобразования (4) совпадает с определителем преобразования (1), определитель же преобразования (3) равен произведению определителей преобразований (1) и (2).

2. Доказательство основной теоремы. Уравнение всякой окружности в декартовых координатах имеет вид:

$$e(x^2 + y^2) + 2lx + 2my + f = 0, \quad (5)$$

где коэффициенты e, f, l, m суть действительные числа; оно охватывает также прямые, которым соответствует значение $e = 0$. Если теперь

положить, как это принято,

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad \text{так что } x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{(\bar{z} - z)i}{2}, \quad (6)$$

то уравнение (5) можно представить в виде:

$$ezz + \bar{\lambda}z + \lambda\bar{z} + f = 0, \quad (7)$$

где $\lambda, \bar{\lambda}$ суть сопряженные комплексные числа:

$$\lambda = l + im, \quad \bar{\lambda} = l - im. \quad (7')$$

Ясно, что и обратно: всякое уравнение вида (7) с действительными коэффициентами e, f и комплексно сопряженными λ и $\bar{\lambda}$ выражает окружность при $e \neq 0$ и прямую при $e = 0$. Выражениям z' (1) и z (4) соответствуют сопряженные значения:

$$\bar{z}' = -\frac{\bar{a}z + \bar{b}}{cz + \bar{d}}, \quad (1')$$

$$\bar{z} = -\frac{\bar{d}z' + \bar{b}}{cz' - a}. \quad (4')$$

Подставляя в уравнение (7) вместо z и $\bar{z}$ выражения (4) и (4'), получим преобразованное уравнение

$$e'z'z' + \bar{\lambda}'z' + \lambda'z' + f = 0, \quad (8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} e' &= ed\bar{d} - \bar{\lambda}d\bar{c} - \lambda c\bar{d} + f\bar{c}\bar{c}, \\ \lambda' &= -e\bar{b}\bar{d} + \bar{\lambda}b\bar{c} + \lambda a\bar{d} - f\bar{a}\bar{c}, \\ \bar{\lambda}' &= -e\bar{b}d + \bar{\lambda}d\bar{a} + \lambda\bar{b}c - f\bar{a}c, \\ f' &= e\bar{b}\bar{b} - \bar{\lambda}a\bar{b} - \lambda a\bar{b} + f\bar{a}\bar{a}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Отсюда видим, что e' и f' суть действительные числа, а λ' и $\bar{\lambda}'$ правильно обозначены как сопряженные комплексные числа. Уравнение (8), таким образом, выражает окружность (в обобщенном значении этого слова). Итак, преобразование (1) переводит окружность в окружность же; теорема доказана.

3. Второе доказательство той же теоремы. Второе доказательство состоит в том, что преобразование (1) разбивается на ряд элементарных преобразований, которые по геометрическим своим свойствам принадлежат к числу круговых.

Начнем с того случая, когда $c = 0$ и, значит, $d \neq 0$; дробнолинейная функция в правой части равенства (1) в этом случае становится целой, т. е. преобразование можно записать в виде:

$$z' = az + b. \quad (10)$$

Его можно представить как результат последовательного произведения двух преобразований:

$$z'' = az, \quad (10_1)$$

$$z' = z'' + b. \quad (10_2)$$

Если положить $b = \alpha + \beta i$, то второе из этих преобразований (10_2) в действительных переменных выражается соотношениями:

$$x' = x'' + \alpha, \quad y' = y'' + \beta, \quad (11)$$

т. е. выражает параллельное перенесение плоскости, которое, очевидно, переводит каждую окружность в конгруэнтную ей окружность.

Что касается первого преобразования (10_1) , то, обозначая модуль числа a через A , а аргумент через ω , видим, что оно сводится к повороту плоскости вокруг начала координат на угол ω и к гомотетии (растяжению радиуса вектора, его умножению на число A). В общем преобразование (10) представляет собой преобразование подобия в широком смысле слова (передвижение плоскости в себе, связанное с гомотетией) и является, следовательно, круговым преобразованием.

Теперь обратимся к тем преобразованиям (1) , в которых $a = 0$. Так как в этом случае $b \neq 0$, то преобразование можно представить в виде

$$z' = \frac{1}{cz + d}. \quad (12)$$

Оно также слагается из двух преобразований

$$z'' = cz + d, \quad (12_1)$$

$$z' = \frac{1}{z''}. \quad (12_2)$$

Первое из них принадлежит к уже рассмотренному типу (10) ; второе имеет особенности, на которых необходимо остановиться. Если модули и аргументы чисел z' и z'' обозначим соответственно через r' и r'' , θ' и θ'' , считая при этом аргументы от $-\pi$ до π , то равенство (12_2) распадается на два:

$$r'r'' = 1, \quad \theta' = -\theta''.$$

Преобразование, таким образом, представляет собой прямую инверсию относительно начала и окружности радиуса 1, соединенную с отражением от действительной оси. Но как инверсия, так и отражение суть круговые преобразования; следовательно, преобразование (12_2) всегда преобразовывает окружность в окружность же. Очень важно заметить, что преобразование $z' = \frac{1}{z}$ представляет собой не чистую инверсию, а инверсию, соединенную с отражением от действительной оси. Инверсию часто называют также отражением от окружности, по отношению к которой инверсия произведена. В этой терминологии преобразование $z' = \frac{1}{z}$ состоит из двух отражений: от прямой и от окружности.

Возвращаясь к общему преобразованию (1) и исключая рассмотренный уже случай $c = 0$, мы можем представить его в виде:

$$z' = \frac{a}{c} - \frac{\Delta}{c(cz + d)}. \quad (13)$$

Оно разбивается на преобразования

$$z''' = cz + d, \quad z'' = \frac{-\Delta}{cz'''}, \quad z' = \frac{a}{c} + z'', \quad (14)$$

каждое из которых принадлежит к числу рассмотренных уже типов и потому представляет собой круговое преобразование. Вместе с тем

установлено, что преобразование (1) представляет собой или подобие (в широком смысле), или произведение подобий и инверсии, соединенной с отражением от действительной оси. Однако чистой инверсии (без отражения) как уже отмечено, преобразование (1) не дает; а так как инверсия есть круговое преобразование, заключаем, что преобразования (1) не исчерпывают всех круговых преобразований.

4. Круговые преобразования, не выражаемые равенством (1). Легко видеть, что чистая инверсия относительно начала и окружности единичного радиуса выражается равенством

$$z' = \frac{1}{\bar{z}}, \quad (15)$$

где $\bar{z}$, как обычно, означает число, сопряженное с z ; в самом деле, обозначая, как выше, через r и r' , θ и θ' модули и аргументы чисел z и z' , можно преобразование (15) представить в виде

$$rr' = 1, \quad \theta' = \theta.$$

В декартовых координатах инверсия (15) выражается равенствами:

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad (16)$$

а при радиусе k круга инверсии — равенствами:

$$x' = k^2 \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y' = k^2 \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (16')$$

Вместе с тем видим, что равенство

$$z' = \frac{\bar{az} + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0) \quad (17)$$

также выражает круговое преобразование; но в то время как преобразования (1) не содержат чистых инверсий, преобразования (17) таковые содержат. Преобразованиями (1) и (17) все круговые преобразования исчерпываются. Доказательство этого не так просто; притом оно для нас не имеет значения, так как нам придется пользоваться только преобразованиями вида (1) и (17)¹⁾.

5. Основная группа круговых преобразований. Преобразования, выражаемые уравнениями вида (1), при определителе Δ , отличном от нуля, образуют группу непрерывных преобразований плоскости. Мы будем называть ее основной группой круговых преобразований. Преобразования (17) сами по себе группы не образуют, потому что произведение двух преобразований вида (17) есть преобразование вида (1). Чтобы ясней это видеть, обратим внимание на то, что преобразование

¹⁾ В сочинении В. Ф. Кагана [8], т. I, § 7 изложено учение о сферических преобразованиях, где этот вопрос по существу исчерпывается. Он уже исчерпан в упомянутых мемуарах Мёбиуса, где показано, что всякое круговое преобразование составляется из перечисленных выше элементарных преобразований, которые в свою очередь всегда выражаются уравнениями вида (1) и (17).

(17) можно записать также в виде:

$$\bar{z}' = \frac{\bar{a}z + \bar{b}}{cz + \bar{d}}. \quad (17')$$

Если теперь за преобразованием (17) следует преобразование

$$z'' = \frac{a'z' + b'}{c'z' + d'},$$

то

$$z'' = \frac{a''z + b''}{c''z + d''},$$

где

$$a'' = a'\bar{a} + b'\bar{c}, \quad b'' = a'\bar{b} + b'\bar{d}, \quad c'' = c'\bar{a} + d'\bar{c}, \quad d'' = c'\bar{b} + d'\bar{d}.$$

Таким образом совокупность всех преобразований (1) и (17) образует группу — общую, шестичленную группу круговых преобразований плоскости; но эта группа не является связной: непрерывным изменением параметров нельзя перейти от преобразования (17) к какому-либо преобразованию (1).

6. Основные инварианты круговых преобразований. Преобразования (1) и (17) по общему свойству элементарных преобразований, из которых они состоят, конформны, т. е. сохраняют углы между преобразуемыми линиями. В то время, однако, как преобразования основной группы сохраняют не только величину каждого угла, но и направление расположения его сторон — знак угла (т. е. если от стороны a к стороне b можно, образуя заданный угол, перейти вращением, скажем, против часовой стрелки, то таким же вращением можно перейти от стороны a' к b'), преобразования (17), напротив, обращают расположение сторон угла. Конформность (сохранение углов) не относится, конечно, к тем углам, вершины которых находятся в так называемом полюсе преобразования, т. е. в точке, в которой знаменатель $cz + d$ (и соответственно $\bar{c}\bar{z} + \bar{d}$) обращается в нуль.

Таким образом величина угла есть один из инвариантов преобразований (1) и (17); другим инвариантом служит ангармоническое отношение четырех точек. Если z_1, z_2, z_3, z_4 суть действительные числа, выражающие абсциссы четырех точек оси абсцисс, то преобразование (1) с действительными коэффициентами есть проективное преобразование прямой и как таковое оставляет инвариантным двойное отношение

$$\{z_3, z_4; z_1, z_2\} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}. \quad (18)$$

Но алгебраическая выкладка, которой это утверждение доказывается, остается в силе и в том случае, когда и коэффициенты преобразования (1) и числа z_1, z_2, z_3, z_4 имеют комплексные значения. Поэтому преобразования (1) оставляют инвариантным двойное (ангармоническое) отношение (18) всякой четверки точек на плоскости. Но лишь в том случае, когда четыре точки лежат на одной окружности, их двойное

отношение всегда имеет действительное значение¹⁾; в таком случае, как нетрудно видеть, двойное отношение (18) инвариантно и относительно преобразований (17).

7. Специальные автоморфизмы. Для того чтобы теперь, базируясь на плоской системе кругов (включающей и прямые), построить модель двумерной метрической геометрии, мы должны по схеме Клейна из общей шестичленной группы круговых преобразований плоскости выделить определенную подгруппу автоморфизмов, именно, трехчленную группу преобразований, оставляющих инвариантным некоторый абсолют. На фиксирование абсолюта у нас остается, таким образом, три параметра; будет показано, что он может быть окружностью²⁾, в частности, может вырождаться в прямую. Главный интерес для нас представляет как раз тот специальный случай (с аналитической стороны наиболее простой), когда абсолютом служит действительная прямая — ось x . Этим случаем мы сейчас и займемся (общий случай — кругового абсолюта — будет рассмотрен ниже, § 80, рубр. 10).

Итак, разыщем условия, при которых дробнолинейное преобразование (1) или (17) оставляет инвариантной действительную ось. Уравнение (7) выражает действительную ось, т. е. принимает вид:

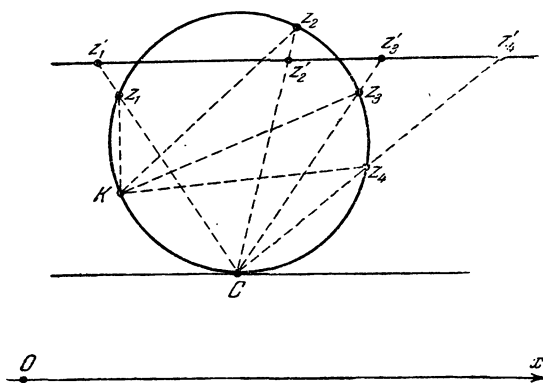
$$z - \bar{z} = 0,$$

если

$$e = 0, f = 0, \bar{\lambda} = -\lambda \neq 0. \quad (19)$$

Последнее равенство выражает, что λ есть чисто мнимое число (вида βi). Чтобы при преобразовании (1) действительная ось оставалась инвариантной, нужно, чтобы тем же условиям удовлетворяли также коэф-

¹⁾ В самом деле, оно в этом случае совпадает со значением соответствующего ангармонического отношения четырех лучей, идущих от произвольной точки K окружности к рассматриваемым четырем ее точкам. В этом нетрудно убедиться,



Черт. 92.

произведя допустимое преобразование — инверсию с центром в точке C (см. черт. 92), в которой касательная к окружности параллельна оси x , и используя известные предложения проективной геометрии (см. § 66, рубр. 4).

²⁾ На выяснении того обстоятельства, что абсолют может быть при данных условиях только окружностью — действительной или мнимой, — мы здесь останавливаться не будем.

фициенты уравнения (8), т. е. чтобы

$$e' = 0, f' = 0, \lambda' = -\bar{\lambda}'. \quad (19')$$

Совместное же существование равенств (19) и (19') при уравнениях преобразования (9) требует, чтобы

$$\bar{c}\bar{d} - \bar{d}\bar{c} = 0, \bar{a}\bar{b} - \bar{b}\bar{a} = 0, \bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c} = \bar{d}\bar{a} - \bar{c}\bar{b}. \quad (20)$$

Последнее равенство свидетельствует, что число $\bar{d}\bar{a} - \bar{c}\bar{b}$ равно сопряженному с ним числу, а следовательно,

$$\bar{d}\bar{a} - \bar{c}\bar{b} = k, \quad (20')$$

где k — действительное число.

Предположим сначала, что коэффициенты a и d отличны от нуля; тогда первые два равенства (20) можно представить в виде:

$$\frac{c}{d} = \frac{\bar{c}}{\bar{d}} = \gamma, \quad \frac{b}{a} = \frac{\bar{b}}{\bar{a}} = \alpha, \quad (21)$$

где α и γ — действительные числа. Подставляя в равенство (20') $\bar{a}\bar{a}$ вместо $\bar{b}$ и $d\gamma$ вместо c , приведем его к виду:

$$\bar{d}\bar{a}(1 - \alpha\gamma) = k. \quad (22)$$

Но из равенств (21) следует также, что $bc = ada\gamma$; поэтому $1 - \alpha\gamma \neq 0$, ибо в противном случае определитель $ad - bc$ обращался бы в нуль. Следовательно, в силу (22) $\bar{d}\bar{a}$ — действительное число, а потому (по разделении на $\bar{a}\bar{a}$) $\frac{d}{a}$ также есть действительное число; обозначая его через δ , т. е. полагая $d = a\delta$, вследствие первого соотношения (21) получим $c = a\delta\gamma = a\beta$, где β — вещественное число. Наше преобразование путем сокращения на a приведется к виду:

$$z' = \frac{z + \alpha}{\beta z + \delta},$$

так что все коэффициенты дробнолинейного преобразования (1) можно считать действительными числами.

Если $d = 0$, но $c \neq 0$ и $b \neq 0$; первое из равенств (20) удовлетворяется тождественно, а второе и третье обнаруживают, что $a = b\alpha'$, $c = b\beta'$, где α' и β' — действительные числа; преобразование же приводится к виду

$$z' = \frac{\alpha'z + 1}{\beta'z},$$

все коэффициенты преобразования и в этом случае суть действительные числа.

Не менее просто исследуется случай, когда $a = 0$, и мы приходим к общему предположению:

Дробнолинейное преобразование (1), оставляющее инвариантной действительную ось, всегда может быть приведено к виду

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad (23)$$

где все коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ суть действительные числа.

Отсюда непосредственно следует, что и преобразование (17), оставляющее инвариантной действительную ось, всегда может быть приведено к виду

$$z' = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta} \quad (23')$$

с действительными коэффициентами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

8. Двойные точки специального автоморфизма. Точки, которые остаются при автоморфизме в покое (остаются инвариантными), называются его двойными или неподвижными точками. При автоморфизме типа (23) они определяются из уравнения

$$z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \text{ т. е. } \gamma z^2 + (\delta - \alpha)z - \beta = 0. \quad (24)$$

Таким образом в этом случае всегда существуют две двойные точки. Дискриминант уравнения (24) с обратным знаком имеет значение

$$(\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma = (\delta + \alpha)^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma) = (\delta + \alpha)^2 - 4\Delta. \quad (25)$$

Здесь налицо три возможности: 1) $(\delta + \alpha)^2 > 4\Delta$; обе двойные точки соответствуют действительным значениям z , т. е. лежат на действительной оси; 2) $(\delta + \alpha)^2 < 4\Delta$; двойным точкам соответствуют комплексные сопряженные значения z_1 и z_2 , т. е. двойные точки расположены симметрично относительно действительной оси; 3) $\delta + \alpha = \pm 2\sqrt{\Delta}$; двойные точки совпадают и также лежат на действительной оси.

При автоморфизме типа (23') дело обстоит существенно иначе. Здесь двойные точки (для которых $z' = z$) определяются из уравнения

$$z = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}, \text{ т. е. } \gamma z \bar{z} + \delta z - \alpha \bar{z} - \beta = 0. \quad (26)$$

Всякая точка, аффикс которой z удовлетворяет этому уравнению, остается при преобразовании (23') в покое.

§ 80. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ, ДАННАЯ ПУАНКАРЕ

1. Субстрат группы интерпретации Пуанкаре. Пользуясь группой круговых преобразований плоскости, Пуанкаре по общему замыслу Клейна построил двумерную метрическую геометрию следующим образом. В евклидовой плоскости, рассматриваемой как плоскость комплексной переменной, принимаем, как обыкновенно, ось абсцисс за ось действительных чисел. Она делит плоскость на две полуплоскости, одну из которых принимаем за субстрат геометрической системы. Для определенности примем за таковую «верхнюю» полуплоскость, т. е. ту, в которой точки имеют положительные ординаты ($y > 0$). Самую ось абсцисс в эту полуплоскость не включаем. За группу автоморфизмов примем совокупность специальных автоморфизмов (§ 79, рубр. 7) в этой плоскости при дополнительном условии, что они преобразуют верхнюю полуплоскость в самое себя. В частности, за «движения» примем преобразования

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma > 0, \quad (1)$$

за «отражения» — преобразования

$$z' = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma < 0. \quad (1')$$

В совокупности они образуют трехчленную группу; однако непрерывным изменением параметров нельзя перейти от «движения» к «отражению» или наоборот. Наше дополнительное условие выражено неравенствами в (1) и (1').

Геометрию, построенную на этих основаниях, будем обозначать через P_2 , сохраняя обозначение E_2 для евклидовой геометрии плоскости. За «прямые» линии в P_2 примем евклидовы полуокружности (конечно, лежащие в верхней полуплоскости), ортогональные к действительной оси, а потому имеющие центры на этой оси; к ним отнесем и евклидовы полупрямые, перпендикулярные к действительной оси.

Два обстоятельства здесь непосредственно ясны. Во-первых, как «движения», так и «отражения» — конформные круговые преобразования плоскости, следовательно, всегда переводят «прямые» в «прямые» же. Во-вторых, через каждые две точки всегда проходит одна и только одна «прямая»; это есть полуокружность, проходящая через эти две точки и имеющая центр на действительной оси, если прямая, соединяющая две данные точки, не перпендикулярна к действительной оси, и сама эта прямая (полупрямая), если она к действительной оси перпендикулярна¹⁾; ее также можно рассматривать как полуокружность бесконечного радиуса. Таким образом первая аксиома Евклида в этой геометрической системе всегда выполняется.

2. Свойства «движений». Преобразования (1), выражающие в этой системе движения, как уже отмечено, образуют группу. К числу их принадлежат, в частности, преобразования вида $z' = z + \beta$, т. е. евклидовы параллельные перенесения вдоль действительной оси и гомотетии

$$z' = \alpha^2 z. \quad (2)$$

Поэтому всякую «точку» M можно «движением» (параллельным перенесением в E_2) перевести в некоторую точку M' на мнимой оси. Если N есть произвольная другая «точка плоскости», то на мнимой оси существует точка N' , имеющая ту же ординату, что и N . Гомотетией (2) можно точку M' перевести в N' и, наконец, новым параллельным перенесением вдоль оси абсцисс можно точку N' перевести в точку N ; таким образом всякую «точку» M можно перевести в любую другую «точку плоскости» N ; «движения» образуют транзитивную группу.

Обращаемся к «вращениям», т. е. к «движениям», которые оставляют неподвижной одну «точку» плоскости. Начнем с того случая, когда неподвижной остается точка $z = i$. Ее оставляют инвариантной те преобразования (1), для которых

$$\frac{\alpha i + \beta}{\gamma i + \delta} = i,$$

т. е. которые имеют $z = i$ двойной точкой. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы $\gamma = -\beta$, $\delta = \alpha$, а вместе с тем $\Delta = \alpha^2 + \beta^2 > 0$, как оно и должно быть. Мы можем, следовательно, сократив числитель и знаме-

¹⁾ Термины, не взятые в кавычки, относятся к евклидовой геометрии плоскости (E_2).

натель на общий множитель, положить

$$\alpha = \cos \frac{\varphi}{2}, \quad \beta = \sin \frac{\varphi}{2}, \quad -2\pi < \varphi < 2\pi,$$

т. е. можем преобразование (1) написать в виде:

$$z' = \frac{z \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2}}{-z \sin \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\varphi}{2}}; \quad (3)$$

«вращение» вокруг точки $z=i$ определяется заданием аргумента φ . Из уравнения (3)

$$dz' = \frac{dz}{\left(\cos \frac{\varphi}{2} - z \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2},$$

а в точке $z=i$

$$dz' = \frac{dz}{\left(\cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2} = dz (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (4)$$

Если поэтому из точки $z=i$ выходят два линейных элемента dz и δz , равные по длине, то, взяв φ равным разности аргументов чисел δz и dz , получим «вращение», переводящее элемент dz в элемент δz .

Иначе говоря, «вращением» вокруг точки $z=i$ можно любое направление, выходящее из этой точки, привести в совмещение с любым другим направлением, а вместе с тем каждый «прямолинейный луч», выходящий из этой точки, можно привести в совмещение с любым другим «лучом», выходящим из той же точки. Если же элементы dz и δz имеют одно и то же направление (т. е. разность их аргументов равна нулю), то «движение» (3) обращается в тождество. Иначе говоря, сохраняя точку i и выходящее из нее направление, уже никакого движения, отличного от тождества, произвести нельзя. Принимая же во внимание, что «движения» образуют транзитивную группу и сохраняют углы, заключаем отсюда, что «вращением» вокруг любой «точки» можно каждый выходящий из нее «луч» привести в совмещение с любым другим «лучом», выходящим из той же точки; по выполнении этого совмещения, т. е. при закреплении какого-либо «луча», дальнейшее «движение» уже невозможно. Законы движения в P_2 , таким образом, совпадают с законами движения в абсолютной геометрии.

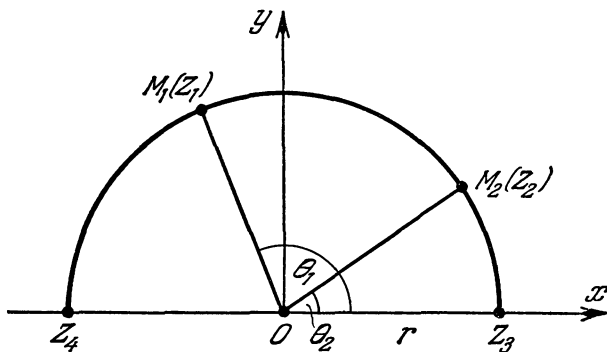
3. Метрика в P_2 . При круговом преобразовании (1) лишь четыре точки имеют инвариант, именно, двойное их отношение

$$J = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}. \quad (5)$$

Но в рассматриваемой системе P_2 (как в системе Клейна) две точки z_1 и z_2 определяют две другие точки z_3 и z_4 — точки пересечения «прямой», проходящей через данные две точки, с действительной осью. Впрочем, эти две точки (z_3 и z_4) сводятся к одной (z_3), когда «прямая», проходящая через точки z_1 и z_2 , представляет собой евклидову прямую, перпендикулярную к действительной оси; за дополнительную

точку (z_4) в таком случае можно взять бесконечно удаленную точку $z_4 = \infty$.

Рассмотрим сначала тот частный случай, когда «прямая», проходящая через «точки» z_1 и z_2 , в E_2 есть полуокружность радиуса r с центром в точке $z=0$ (черт. 93). Она пересекает действительную ось в точках $z_3=r$ и $z_4=-r$. Если через θ_1 и θ_2 обозначим аргументы чисел z_1 и z_2 (т. е. углы z_1Oz_3 и z_2Oz_3), то $z_1 = r(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$,



Черт. 93.

$z_2 = r(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$; вместе с тем ангармоническое отношение (5) принимает значение¹⁾

$$J = \frac{1 - \cos \theta_1 - i \sin \theta_1}{1 - \cos \theta_2 - i \sin \theta_2} : \frac{1 + \cos \theta_1 + i \sin \theta_1}{1 + \cos \theta_2 + i \sin \theta_2} = -\frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}};$$

оно обращается в 1, когда точка z_2 совпадает с z_1 . Поэтому за «расстояние» между точками M_1 и M_2 принимаем число, пропорциональное $\ln J$: полагаем

$$(M_1 M_2) = k \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}}, \quad (6)$$

где k — произвольное, постоянное для всевозможных пар «точек», положительное число; при этом за θ_1 надлежит принять больший из двух углов θ_1 и θ_2 . Легко видеть, что определяемое таким образом «расстояние» между двумя точками обладает аддитивностью для трех точек «прямой». Вместе с тем ясно, что «расстояние» это неограниченно возрастает по абсолютной величине, когда одна из двух точек остается на месте, а другая неограниченно приближается к действительной оси. Таким образом с точки зрения геометрии P_2 точки действительной оси являются «бесконечно удаленными точками».

В общем случае, когда «прямая», соединяющая точки z_1 и z_2 , в E_2 есть полуокружность, центр которой лежит на действительной оси в какой-либо точке O_1 , то параллельным перенесением его можно совместить с точкой $z=0$; «расстояние» между точками z_1 и z_2 сохраняет

¹⁾ Существенно, что это значение всегда действительно — факт, уже отмеченный нами ранее (§ 79, рубр. 6), — и положительно.

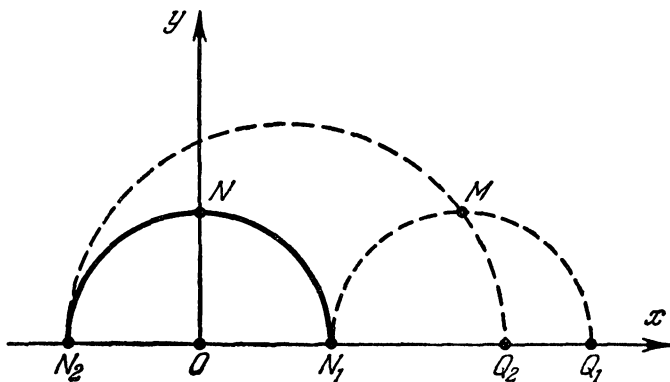
то же выражение (6), где, однако, θ_1 и θ_2 суть углы, образуемые векторами O_1z_1 и O_1z_2 с положительным направлением действительной оси.

Наконец, если точки M_1 и M_2 лежат на прямой, перпендикулярной к действительной оси в точке C , то $z_4 = \infty$ и двойное отношение (5) сводится к простому отношению $\frac{CM_1}{CM_2}$, а потому в формуле (6) отношение тангенсов заменяется отношением $\frac{y_1}{y_2}$, где y_1 и y_2 — ординаты данных точек M_1, M_2 ($y_1 > y_2$).

Под «углом» между двумя направленными кривыми «линиями», выходящими из общей «точки» в P_2 , разумеют угол, образуемый соответствующими направлениями в исходной евклидовой плоскости; иными словами, отображение плоскости P_2 на E_2 конформно; а так как «движениям» в P_2 также соответствуют конформные преобразования в E_2 , то в P_2 величины «углов» при «движениях» не меняются.

4. Свойства «отражений». Так как преобразования (1') также сохраняют ангармоническое отношение (5) четырех точек (§ 79, конец рубр. 6), то «расстояние» между двумя «точками», выраженное формулой (6), остается в P_2 инвариантным и при «отражении»; вследствие конформности преобразования остаются инвариантными и величины «углов». Но направление «угла» при «отражении», как уже было отмечено в рубр. 5 § 79, меняется на обратное.

5. Аксиоматика геометрии в P_2 . Из определения «расстояния» между двумя «точками» в P_2 вытекает, что любой «прямолинейный отрезок» в P_2 может быть продолжен в обе стороны на неограниченно

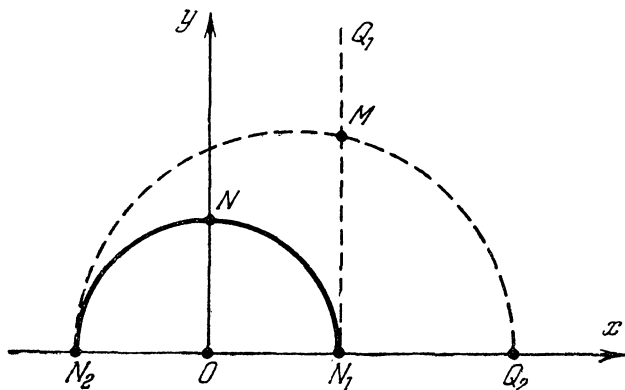


Черт. 94.

большое «расстояние», причем это продолжение не приводит в «точку» исхода. Второй постулат Евклида, как и первый (см. рубр. 1), таким образом, остается в P_2 в силе. Нетрудно видеть, что остаются в силе и постулаты III и IV. Из других постулатов, которые явно или неявно допускает абсолютная геометрия плоскости и которых Пуанкаре уже не мог игнорировать, очевидно, остаются в силе: постулат Паша, постулат о непрерывности прямой с расположением точек прямой, как образующих упорядоченное множество. Пуанкаре считал поэтому, что

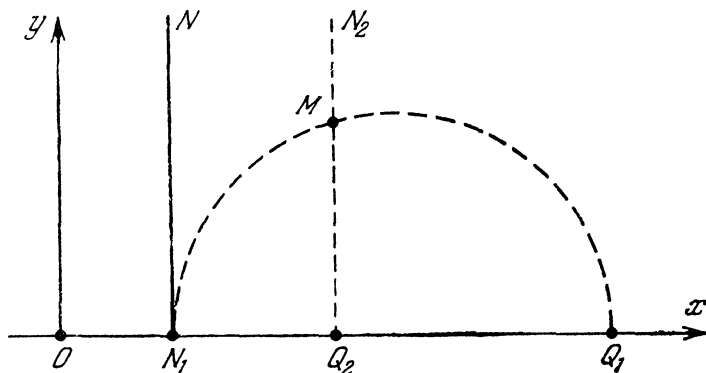
все аксиомы абсолютной геометрии плоскости сохраняются в построенной им геометрии P_2 .

Чтобы вполне охарактеризовать геометрию P_2 , оставалось выяснить, как обстоит дело с V постулатом Евклида. За «параллельные прямые» в P_2 нужно, очевидно, принять, во-первых, полуокружности, имеющие касание на действительной оси, т. е. в «бесконечно удаленной точке»;



Черт. 95.

во-вторых, полупрямые, перпендикулярные к действительной оси, — они также имеют общую «бесконечно удаленную точку» $z = \infty$. Мы рассмотрим поэтому два случая: 1) когда данная «прямая» есть полуокружность N_1NN_2 с центром, скажем, в точке O (черт. 94, 95); 2) когда данная «прямая» есть полупрямая N_1N , перпендикулярная к действительной оси в точке N_1 (см. черт. 96). И в том, и в другом случае



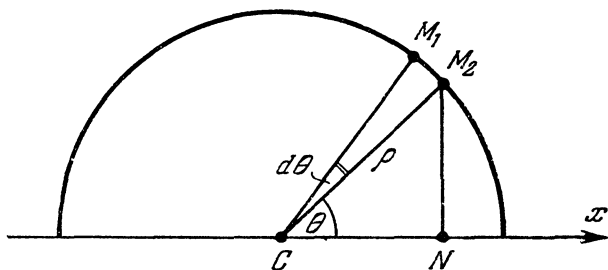
Черт. 96.

через «точку» M , лежащую вне данной «прямой», проходят две «прямые», «параллельные» данной «прямой». В первом случае это — полуокружности (или полуокружность и полупрямая, см. черт. 95) N_1MQ_1 , N_2MQ_2 , касающиеся полуокружности N_1NN_2 в точках N_1 , N_2 на действительной оси; во втором случае — полуокружность N_1MQ_1 и полупрямая Q_2M , перпендикулярная к оси Ox в точке Q_2 и, следовательно,

встречающая данную «прямую» N_1N в ее бесконечно удаленной точке $z = \infty$. «Прямые», проходящие в вертикальных углах N_1MN_2 и Q_1MQ_2 , пересекают данную «прямую» N_1N ; «прямые» же, проходящие в углах N_1MQ_2 и N_2MQ_1 , данной «прямой» N_1N не встречаются.

Мы имеем в любой «точке» M полную конфигурацию Лобачевского. Пуанкаре отсюда заключил, что построенная им геометрия есть двумерная гиперболическая геометрия, геометрия Лобачевского. Этот вывод в ту пору, естественно, не мог быть свободен от сомнений, поскольку аксиоматика абсолютной геометрии еще не была строго установлена, как не было с необходимой строгостью обоснована и интерпретация Клейна (см. указание на стр. 74 § 63).

6. Основная метрическая форма в P_2 . Вывод, изложенный выше, подкрепляется следующими соображениями. Предположим, что точки M_1, M_2 , «расстояние» между которыми выражено формулой (6)



Черт. 97.

бесконечно близки. Соответственно этому обозначим углы θ_2 и θ_1 через θ и $\theta + d\theta$ (черт. 97). «Расстояние» между этими точками (т. е. длина «прямолинейного отрезка» M_1M_2 в P_2) согласно указанной формуле равно

$$ds = k \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\theta + d\theta}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right).$$

Ограничиваясь бесконечно малыми первого порядка, можем положить

$$ds = kd \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = k \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} d \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = k \frac{d\theta}{\sin \theta}.$$

Умножая числитель и знаменатель этой дроби на евклидову длину ρ отрезка CM_2 и принимая во внимание, что с точностью до бесконечно малых первого порядка $\rho d\theta$ можно считать равным евклидовой длине δs отрезка M_1M_2 , а $\rho \sin \theta = M_2N$ равно ординате y точки M , находим:

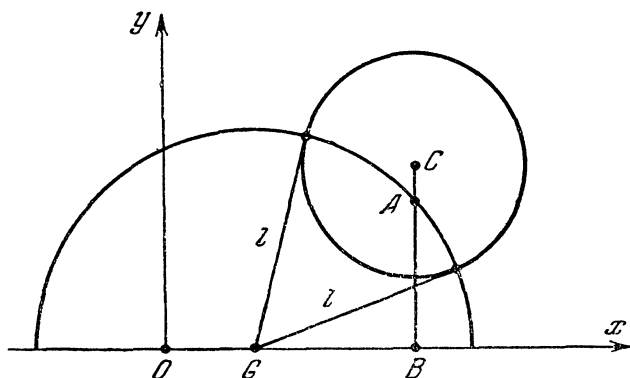
$$ds = k \frac{\delta s}{y} = k \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}, \quad (7)$$

где x, y — декартовы координаты точки M_2 в E_2 . Мы видим, что метрическая форма в P_2 в надлежащих координатах совпадает с основной метрической формой гиперболической плоскости (формула (LXXXIV₁), ч. I, стр. 366). Это подтверждает высказывание, что геометрия P_2 совпадает с геометрией Лобачевского. Это — те же соображения, кото-

рые приводит Бельтрами в доказательство своего вывода, что геометрия поверхности постоянной отрицательной кривизны в евклидовом пространстве совпадает с неевклидовой геометрией Лобачевского (§ 58, рубр. 6). Но самый вывод здесь более обоснован, потому что плоскость, в которой строится геометрия P_2 , регулярна на всем своем неограниченном протяжении.

Интерпретация Пуанкаре, как и модель Клейна, послужила делу подтверждения логической правильности геометрии Лобачевского. Ее можно строить непосредственно на этой модели; это выполнено Шиллингом (F. Schilling [19]) и Б. Я. Букреевым [17]. Отсылая читателей к этим сочинениям, мы здесь только выясним, как в интерпретации Пуанкаре выглядят кривые постоянной кривизны гиперболической плоскости.

7. Кривые постоянной кривизны в P_2 . В P_2 возьмем евклидову окружность C радиуса a (расположенную целиком в P_2 , т. е. над осью абсцисс) (черт. 98). Рассматривая ее в евклидовой плоскости, обозначим



Черт. 98.

через α , β координаты центра; ее уравнение будет

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = a^2. \quad (8)$$

Из произвольной точки G на оси абсцисс, как из центра, проведем окружность G , секущую окружность C ортогонально. Ее радиус равен длине l касательных, проведенных к окружности C из точки G ; если через ρ обозначим расстояние GC , а через g — абсциссу точки G , то

$$l^2 = \rho^2 - a^2 = (g - \alpha)^2 + \beta^2 - a^2.$$

Поэтому уравнение окружности G есть

$$(x - g)^2 + y^2 = (g - \alpha)^2 + \beta^2 - a^2. \quad (9)$$

Ее пересечение с прямой CB , параллельной оси y ($x = \alpha$), происходит в точке A , имеющей координаты $x = \alpha$, $y = \sqrt{\beta^2 - a^2}$, следовательно, не зависящей от выбора точки G ; так как $\beta > a$, то это — действительная точка. Таким образом окружности G , имеющие центры в различных точках прямой Ox и ортогональные к окружности C , проходят через постоянную точку A прямой CB . В гиперболической плоскости,

которую осуществляет P_2 , евклидовы окружности G , имеющие центры на Ox , изображают гиперболические прямые, проходящие через постоянную точку A . Иначе говоря, в гиперболической плоскости S есть кривая, секущая ортогонально пучок «прямых», проходящих через точку A ; это есть «окружность», имеющая «центр» в точке A , лежащей внутри окружности S на диаметре, параллельном мнимой оси. В этой точке

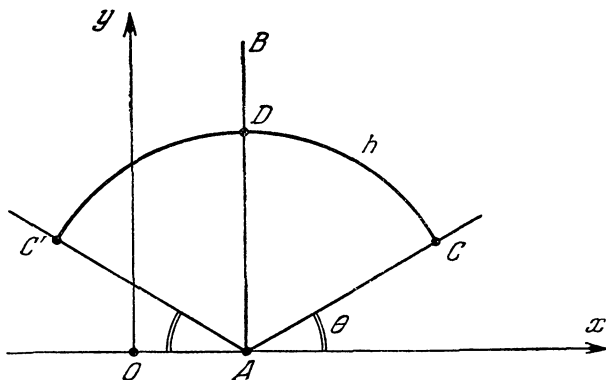
$$y^2 = \beta^2 - a^2 = (\beta - a)^2 + 2a(\beta - a), \quad (10)$$

и потому

$$y > \beta - a.$$

Иначе говоря, евклидова окружность, лежащая целиком внутри верхней полуплоскости, представляет собой и гиперболическую «окружность» (и обратно); но «центр» последней лежит ниже центра S евклидовой окружности.

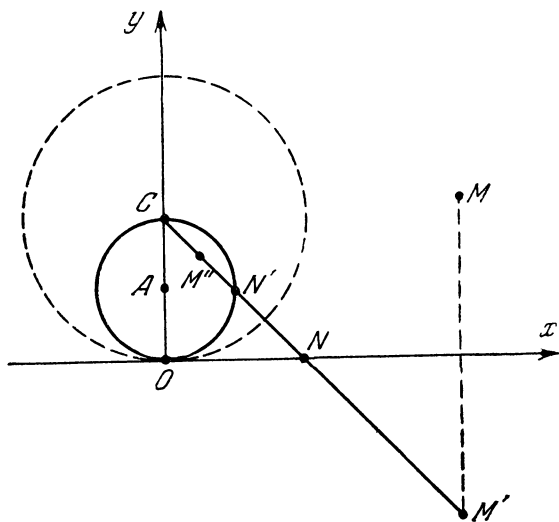
Если $\beta = a$, т. е. если окружность S касается действительной оси, то она также представляет собой гиперболическую окружность, имеющую,



Черт. 99.

однако, центр в точке B , т. е. в «бесконечно удаленной точке»: это есть предельная линия (орицикл). Орициклами также следует, очевидно, считать все прямые, параллельные действительной оси. Рассмотрим, наконец, как в этой интерпретации изображаются эквидистанты гиперболической плоскости. Покажем прежде всего, что такими эквидистантами служат евклидовы прямые, пересекающие действительную ось не под прямым углом. В самом деле, предположим, что базой эквидистанты служит «прямая» AB , параллельная оси y (евклидова прямая, изображающая также гиперболическую прямую). Если AC есть прямая (черт. 99), проходящая через точку A пересечения прямой AB с действительной осью и образующая с последней угол θ , то «расстояние» ее точки C от «прямой» AB выражается длиной дуги CD проходящей через нее окружности с центром в точке A ; в самом деле, эта дуга в P_2 есть «перпендикуляр», опущенный «из точки» C на «прямую» AB . Но «длина» h этого «перпендикуляра» по формуле (6) равна $k \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$ и, следовательно, не зависит от положения точки C на прямой AC . Эта прямая, точнее, ее луч AC в верхней полуплоскости,

8. Конформное отображение гиперболической плоскости на евклидову внутри круга. В изложенной интерпретации гиперболическая плоскость конформно отображена на полуплоскость, лежащую над действительной осью, которая служит абсолютом; движениями же служат круговые преобразования, оставляющие действительную ось инвариантной. Но от этой интерпретации легко перейти к другой, в которой гиперболическая плоскость отображается на внутренность круга, окружность которого служит абсолютом, а движениями служат круговые преобразования, оставляющие эту окружность инвариантной. С этой целью возьмем окружность C (черт. 101), лежащую в верхней полуплоскости ($y > 0$) и касающуюся действительной оси в начале координат O . При инверсии U относительно окружности C ее точки (в том числе и точка O) остаются инвариантными, а действительная ось перейдет в окружность, проходящую через центр инверсии C и ортогональную к прямой OC — имеющую, таким образом, центр в середине A радиуса CO . Теперь произведем преобразование T плоскости P_2 , состоящее из отражения V от действительной оси и инверсии U относительно окружности C ($T=UV$). Пусть M будет произвольная точка верхней полуплоскости. При отражении V она перейдет в точку M' нижней полуплоскости. Если прямая $M'C$ встречается действительную ось в точке N , то последняя при инверсии U переходит в точку N' окружности A . Точка же M' , отстоящая от C на расстоянии $CM' > CN$, перейдет в точку M'' , лежащую на CN на расстоянии $CM'' < CN'$. Следовательно, преобразование T переводит всю верхнюю полуплоскость внутри окружности A .



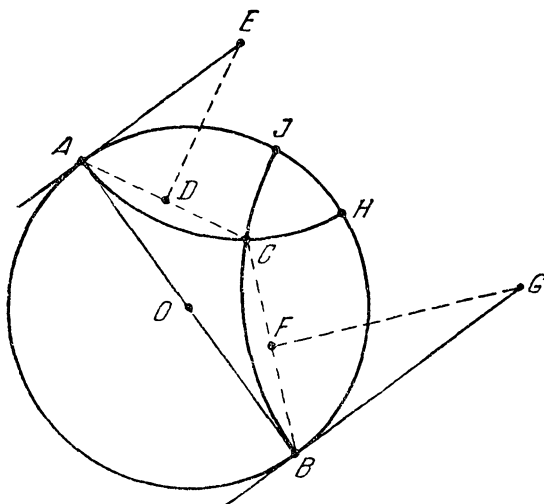
Черт. 101.

Следовательно, преобразование T переводит всю верхнюю полуплоскость внутри окружности A .

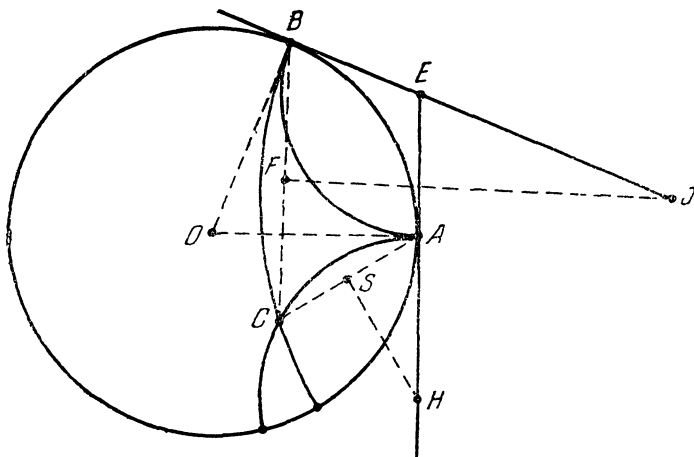
9. Интерпретация Пуанкаре с круговым абсолютном. Если через S обозначим какое-либо круговое преобразование, оставляющее инвариантной действительную ось, то TST^{-1} есть круговое преобразование, оставляющее инвариантным круг A . Существует, таким образом, ∞^3 круговых преобразований, оставляющих круг A инвариантным. Если примем круг A за субстрат, а указанные преобразования — за движения и отражения в нем, то придем к новому осуществлению двумерной геометрии Лобачевского, к новой ее интерпретации (или модели). Ясно, что «прямыми» будут служить окружности, секущие абсолютную окружность ортогонально, точнее, внутренние (по отношению к абсолюту) дуги таких окружностей. Кривыми постоянной кривизны будут также служить окружности, а именно: окружности, лежащие внутри абсолютта, будут служить также гиперболическими окружностями (только с другим

центром); окружности, лежащие внутри абсолюта, но касающиеся его, будут служить предельными линиями; наконец, окружности, пересекающие абсолют не ортогонально, будут служить эквидистантами.

10. Простейшие построения в этой интерпретации. Конформная интерпретация гиперболической плоскости отличается внутри круга большей симметрией, чем первая интерпретация Пуанкаре (в полупло-



Черт. 102.



Черт. 103.

скости). Геометрические построения гиперболической плоскости отличаются в ней большой простотой. В своей диссертации, а также в работах [48] и [49] М. В. Гиршович дал обстоятельное изложение этих построений и теории. Отсылая читателя к этой работе, приведем только основное построение двух «параллелей», проходящих из данной «точ-

ки» C к данной «прямой» AB . Если этой «прямой» AB служит диаметр абсолюта (черт. 102), то искомыми параллелями служат окружности ACH и BCJ , проходящие через «точку» C и касающиеся «прямой» AB в точках A и B (на черт. 102 $DE \perp AC$ в середине D отрезка AC ; $AE \perp AB$; E — центр окружности ACH ; $FG \perp CB$ в середине F отрезка CB ; $BG \perp AB$; G — центр окружности BCJ). Немного сложнее обстоит дело, когда «прямой» AB служит окружность, ортогональная к абсолюту (черт. 103). В этом случае дело сводится к построению окружностей AC и BC , ортогональных к абсолюту в точках A и B , а поэтому касающихся окружности AB в этих точках. (На чертеже E — центр окружности AB ; AE и BE — касательные к абсолюту, центром H окружности AC служит точка касательной AE , лежащая на перпендикуляре к отрезку AC в его середине S ; центром окружности BC служит точка J касательной BE , лежащая на перпендикуляре JF к отрезку BC в его середине F .)

ГЛАВА ДЕВЯТНАДЦАТАЯ АКСИОМАТИКА ПРЯМОЙ

§ 81. УЧЕНИЕ О ВЕЛИЧИНЕ

1. Вводные соображения. Рассуждения, изложенные выше, собственно представляют только подготовительный материал к действительному учению об основаниях геометрии: они частями представляют собой логические выводы из сделанных посылок, отчасти представляют собой соображения, основанные на тех или иных наглядных соображениях. Приступая к систематическому изложению самых оснований геометрии, мы должны установить те исходные понятия и положения (аксиомы или постулаты), основываясь на которых действительно возможно строго логически строить геометрию. Следующие соображения выясняют, как мы намерены это выполнить, как действительно логически последовательно строится геометрия.

Приступая к этому, мы должны прежде всего установить основные понятия геометрии. Но как это сделать, не опираясь на наглядные представления? Основной метод, которым это достигается, заключается в том, что основные понятия выносятся за пределы геометрии, строятся шире, чем в применении к нашим наглядным представлениям. Чтобы дать представление о том, как этот метод вообще применяется, мы прежде всего изложим дисциплину, в которой это уже действительно выполнено. Мы изложим основы учения о величине, которые удовлетворяют всем этим требованиям, они нам и по существу понадобятся в дальнейшем изложении.

2. Различного рода отношения, связывающие элементы некоторого множества. Положим, что мы рассматриваем некоторое множество $\mathfrak{A}$, элементы которого обозначены через $a, b, c, \dots, x, y, z$. Часто бывает, что сопоставление двух из этих элементов, различных или совпадающих, взятых в определенном порядке, например, x, y , приводит к установлению некоторого признака α , в осуществлении которого участвуют эти элементы в указанном порядке (x, y) . В таком случае мы будем говорить, что элемент x находится к элементу y в отношении α , и будем это выражать в письме так: $xy\alpha$. Так, если множество $\mathfrak{A}$ состоит из мужчин — членов некоторой семьи, то отношение α может заключаться в том, что x есть отец y или x есть сын y , или x есть брат y и т. п. Мы видим, таким образом, что понятие «отношение элементов множества», в этом смысле понимаемое, выходит далеко за пределы геометрии и даже математики вообще.

Отношение α иногда обладает тем свойством, что $xy\alpha$ всегда влечет за собой $yx\alpha$; оно тогда называется обратимым. Если же в пределах

рассматриваемого множества $\mathfrak{A}$ отношение $xaу$ хотя бы для одной пары элементов не сопровождается отношением $уax$, то оно называется необратимым. Так, в приведенном выше примере, если $xaу$ означает, что x есть брат $у$, то $xaу$ всегда влечет за собой $уax$, это отношение обратимое. Если же оно означает, что x есть отец $у$, то из $xaу$ никогда не следует $уax$; это отношение необратимое. Отношение называется транзитивным, если для трех элементов x, y, z , связанных отношением α таким образом, что как только имеют место отношения $xaу$ и $уaz$, всегда имеет место и отношение xaz . Если в приведенном выше примере $xaу$ означает, что x есть брат $у$, то из $xaу$ и $уaz$ всегда следует xaz ; это отношение транзитивное.

Мы намеренно приводим эти тривиальные примеры, чтобы отчетливо подчеркнуть, что эти понятия выходят далеко за пределы математики.

3. Отношения, определяющие величину. Положим, что между элементами некоторого множества $\mathfrak{A}$ могут иметь место отношения троякого рода, которые мы будем обозначать через α, β и γ . Допустим, что отношения эти обладают следующими свойствами:

1. Каждые два элемента x, y множества $\mathfrak{A}$ находятся друг к другу в этом порядке, по крайней мере, в одном из отношений α, β, γ (так что всегда имеет места, по крайней мере, одно из отношений $xaу, x\beta y, x\gamma y$).

2. Отношение α исключает отношение β (это значит, если имеет место $xaу$, то не имеет места отношение $x\beta y$).

3. В этом же смысле отношение α исключает отношение γ .

4. Каждый элемент множества находится в отношении α к самому себе (т. е. каков бы ни был элемент x нашего множества, имеет место отношение xx).

5. Отношение α обратимо (это значит, если имеет место $xaу$, то ему всегда сопутствует отношение $уax$).

6. Отношение α транзитивно (т. е. если имеют место отношения $xaу$ и $уaz$, то имеет место и отношение xaz).

7. Отношение β транзитивно (т. е. если имеют место отношения $x\beta y$ и $y\beta z$, то имеет место и отношение $x\beta z$).

8. Отношение γ транзитивно (т. е. если имеют место отношения $x\gamma y$ и $y\gamma z$, то имеет место и отношение $x\gamma z$).

При этих условиях мы будем называть множество $\mathfrak{A}$ величиной, а его элементы — значениями этой величины; отношение α будем выражать в словах « x равно y ». Отношение β будем выражать в словах « x меньше y », а отношение γ будем выражать « x больше y ». Свойства 1—8 будем называть постулатами сравнений.

Из перечисленных постулатов сравнения вытекают все те свойства, которыми мы пользуемся, оперируя понятием величины.

4. Совокупность свойств, вытекающих из постулатов сравнения. Заметим, что если на основании перечисленных постулатов будет доказана некоторая теорема для признака β , то эта же теорема будет иметь место и для признака γ . Действительно, система постулатов 1—8 не изменится, если мы заменим в них признак β признаком γ , и наоборот, признак γ — признаком β .

Теорема 1. Отношение β необратимо, а именно: из $x\beta y$ вытекает $y\gamma x$.

В самом деле, в силу постулата 1 имеет место, по крайней мере, одно из отношений $y\alpha x$, $y\beta x$, $y\gamma x$. Если бы имело место $y\alpha x$, то имело бы также место $x\alpha y$ (постулат 5); но это невозможно в силу постулата 2, так как по условию $x\beta y$. Если бы имело место отношение $y\beta x$, то из отношений $x\beta y$ и $y\beta x$ следовало бы $x\beta x$ (постулат 7), что несовместимо с соотношением $x\alpha x$ (постулаты 2 и 4). Таким образом неизбежно должно быть $y\gamma x$.

В силу сделанного выше замечания имеет место также и следующее высказывание:

Теорема 2. Отношение $x\gamma y$ необратимо; именно, из $x\gamma y$ вытекает $y\beta x$.

Теорема 3. Отношение $x\beta y$ исключает отношение $x\gamma y$.

В самом деле, пусть дано $x\beta y$; если бы имело место также $x\gamma y$, то (теорема 2) имело бы также место $y\beta x$, и потому в силу постулата 7 было бы $x\beta x$, что противоречит постулатам 2 и 4.

Теорема 4. В каждом отношении $x\alpha y$, $x\beta y$, $x\gamma y$ можно любой из элементов (x или y) заменить другим элементом, связанным с ним отношением α (иначе говоря, в каждом равенстве или неравенстве можно любой из элементов заменить равным ему элементом).

а) Так, если $x\alpha y$ и $x\alpha z$, то $z\alpha y$. В самом деле, из $x\alpha z$ следует, что $z\alpha x$ (постулат 5), а из соотношений $z\alpha x$ и $x\alpha y$ вследствие постулата 6 следует, что $z\alpha y$. Если же имеем $x\alpha y$ и $y\alpha z$, то $x\alpha z$ имеет место вследствие транзитивности отношения α (постулат 6).

б) Если $x\beta y$ и $x\alpha z$, то $z\beta y$. В самом деле, по постулату 1 имеет место, по крайней мере, одно из трех отношений $z\alpha y$, $z\beta y$, $z\gamma y$. Однако $x\alpha z$ и $z\alpha y$ влекут за собой (постулат 6) $x\alpha y$, что противоречит (постулат 2) условию.

Но легко видеть, что не может быть также $z\gamma y$; в самом деле, из $z\gamma y$ следовало бы также (теорема 2) $y\beta z$; но тогда из $x\beta y$ и $y\beta z$ следовало бы (постулат 7) $x\beta z$, что противоречит условию $x\alpha z$ (постулат 2).

Следовательно, имеет место $z\beta y$.

с) Если $x\gamma y$ и $x\alpha z$, то $z\gamma y$. Эта теорема действительно имеет место в силу сделанного на стр. 253 замечания и проведенного доказательства для случая б).

Различные другие комбинации исчерпываются аналогичным образом; обнаружить это не затруднит читателя.

Таким образом, из постулатов 1—8 вытекают все отношения, которыми приходится пользоваться в учении о величине. Возникает, однако, вопрос, осуществимы ли совместно постулаты 1—8 и независимы ли они. Иначе говоря, могут ли в каком-либо множестве совместно существовать отношения α , β , γ , которые обладают свойствами, выраженными в постулатах 1—8, и независимы ли эти постулаты, т. е. не вытекает ли какой-либо из них из совокупности семи остальных. Покажем, что в этом вопросе все обстоит благополучно.

5. Совместность и независимость постулатов сравнения. Чтобы это обнаружить, С. О. Шатуновский [78], которому принадлежит вся излагаемая здесь теория, составил девять таблиц, рассмотрением которых исчерпывается вопрос.

Первая из этих таблиц (таблица 1) относится к множеству, содержащему пять элементов: A, B, C, D, E . Она выглядит следующим образом:

Таблица 1

$A\alpha A$	$A\alpha B$	$A\alpha C$	$A\gamma D$	$A\gamma E$
$B\alpha B$	$B\alpha A$	$B\alpha C$	$B\gamma D$	$B\gamma E$
$C\alpha C$	$C\alpha A$	$C\alpha B$	$C\gamma D$	$C\gamma E$
$D\alpha D$	$D\beta A$	$D\beta B$	$D\beta C$	$D\gamma E$
$E\alpha E$	$E\beta A$	$E\beta B$	$E\beta C$	$E\beta D$

Автор считает, что между двумя элементами этого множества существует то или иное соотношение α, β или γ , если оно записано в этой таблице, и не существует, если его в этой таблице нет. Так, соотношение $C\alpha B$ существует, ибо оно записано в этой таблице. Точнее, самое утверждение $C\alpha B$ означает, что оно записано в этой таблице: отношение же $A\alpha E$ не существует, ибо оно в этой таблице не записано. Легко убедиться, что установленные этой таблицей в рассматриваемом множестве отношения α, β, γ удовлетворяют всем требованиям постулатов 1—8. Таким образом мы непосредственным созерцанием убеждаемся, что эти постулаты осуществляются в нашем множестве, а потому совместны.

Таблица 2 относится к множеству, содержащему шесть элементов, именно, кроме перечисленных пяти содержит еще шестой элемент F . Кроме же отношений α, β, γ некоторые элементы множества связаны отличным от них отношением δ . Рассматривая эту таблицу, видим, что из

Таблица 2

$A\alpha A$	$A\alpha B$	$A\alpha C$	$A\gamma D$	$A\gamma E$	$A\delta F$
$B\alpha B$	$B\alpha A$	$B\alpha C$	$B\gamma D$	$B\gamma E$	$B\delta F$
$C\alpha C$	$C\alpha A$	$C\alpha B$	$C\gamma D$	$C\gamma E$	$C\delta F$
$D\alpha D$	$D\beta A$	$D\beta B$	$D\beta C$	$D\gamma E$	$D\delta F$
$E\alpha E$	$E\beta A$	$E\beta B$	$E\beta C$	$E\beta D$	$E\delta F$
$F\alpha F$	$F\delta A$	$F\delta B$	$F\delta C$	$F\delta D$	$F\delta E$

отношений, устанавливаемых этой таблицей, те, которые содержат отношения α, β, γ , удовлетворяют всем требованиям постулатов 1—8; однако существуют элементы, которые не связаны ни одним из этих трех отношений, но связаны четвертым отношением δ . Таким образом постулат 1 в этом множестве не выполнен; он не является поэтому следствием остальных семи постулатов, он от них не зависит.

Третью таблицу автор составляет, присоединяя к таблице 1 отношение $A\beta B$; таблица 3 выглядит поэтому следующим образом:

Таблица 3

$A\alpha A$	$\left\{ \begin{array}{l} A\alpha B \\ A\beta B \end{array} \right.$	$A\alpha C$	$A\gamma D$	$A\gamma E$
$B\alpha B$	$B\alpha A$	$B\alpha C$	$B\gamma D$	$B\gamma E$
$C\alpha C$	$C\alpha A$	$C\alpha B$	$C\gamma D$	$C\gamma E$
$D\alpha D$	$\left[\begin{array}{l} D\beta A \\ D\beta B \end{array} \right]$	$D\beta C$	$D\gamma E$	
$E\alpha E$	$E\beta A$	$E\beta B$	$E\beta C$	$E\beta D$

Мы получаем таблицу, обнаруживающую, что второй постулат не зависит от семи остальных: в ней отношение $A\alpha B$ существует совместно с $A\beta B$, иными словами, отношение α между двумя элементами не исключает отношения β между теми же элементами. Постулат 2 таким образом не выполнен, тогда как остальные постулаты остаются в силе; он, таким образом, не является следствием остальных постулатов.

Аналогично этому С. О. Шатуновский составляет таблицу 4, присоединяя к первой отношение $A\gamma B$. Этим доказывается независимость постулата 3 от остальных.

Таблица 4

$A\alpha A$	$\left\{ \begin{array}{l} A\alpha B \\ A\gamma B \end{array} \right.$	$A\alpha C$	$A\gamma D$	$A\gamma E$
$B\alpha B$	$B\alpha A$	$B\alpha C$	$B\gamma D$	$B\gamma E$
$C\alpha C$	$C\alpha A$	$C\alpha B$	$C\gamma D$	$C\gamma E$
$D\alpha D$	$\left[\begin{array}{l} D\beta A \\ D\beta B \end{array} \right]$	$D\beta C$	$D\gamma E$	
$E\alpha E$	$E\beta A$	$E\beta B$	$E\beta C$	$E\beta D$

Таблицу 5 составляют, заменив в таблице 2 все δ последней горизонтали через β , а все остальные δ через γ и присоединив к ней отношение $F\beta F$. Она выглядит, следовательно, так:

Таблица 5

$A\alpha A$	$A\alpha B$	$A\alpha C$	$A\gamma D$	$A\gamma E$	$A\gamma F$
$B\alpha B$	$B\alpha A$	$B\alpha C$	$B\gamma D$	$B\gamma E$	$B\gamma F$
$C\alpha C$	$C\alpha A$	$C\alpha B$	$C\gamma D$	$C\gamma E$	$C\gamma F$
$D\alpha D$	$\left[\begin{array}{l} D\beta A \\ D\beta B \end{array} \right]$	$D\beta C$	$D\gamma E$	$D\gamma F$	
$E\alpha E$	$E\beta A$	$E\beta B$	$E\beta C$	$E\beta D$	$E\gamma F$
$F\beta F$	$F\beta A$	$F\beta B$	$F\beta C$	$F\beta D$	$F\beta E$

Она доказывает, таким образом, независимость постулата 4, который в этой таблице не выполняется.

В таблице 6 выполняются все постулаты сравнения, кроме постулата 5.

Таблица 6

$A\alpha A$	$A\alpha B$	$A\alpha C$	$A\gamma D$	$A\gamma E$
$B\alpha B$	$B\beta A$	$B\alpha C$	$B\gamma D$	$B\gamma E$
$C\alpha C$	$C\beta A$	$C\beta B$	$C\gamma D$	$C\gamma E$
$D\alpha D$	$D\beta A$	$D\beta B$	$D\beta C$	$D\gamma E$
$E\alpha E$	$E\beta A$	$E\beta B$	$E\beta C$	$E\beta D$

В таблице 7 не выполняется только постулат 6, остальные постулаты сравнения имеют место.

Таблица 7

$A\alpha A$	$A\alpha B$	$A\alpha C$	$A\gamma D$
$B\alpha B$	$B\alpha A$	$B\beta C$	$B\gamma D$
$C\alpha C$	$C\alpha A$	$C\gamma B$	$C\gamma D$
$D\alpha D$	$D\beta A$	$D\beta B$	$D\beta C$

Для доказательства независимости постулата 7 от остальных постулатов сравнения служит таблица 8, а для доказательства независимости постулата 8—таблица 9.

Таблица 8

$A\alpha A$	$A\alpha B$	$A\alpha C$	$A\beta D$	$A\beta E$
$B\alpha B$	$B\alpha A$	$B\alpha C$	$B\beta D$	$B\beta E$
$C\alpha C$	$C\alpha A$	$C\alpha B$	$C\gamma D$	$C\gamma E$
$D\alpha D$	$D\beta A$	$D\beta B$	$D\beta C$	$D\gamma E$
$E\alpha E$	$E\beta A$	$E\beta B$	$E\beta C$	$E\beta D$

Таблица 9

$A\alpha A$	$A\alpha B$	$A\alpha C$	$A\gamma D$	$A\gamma E$
$B\alpha B$	$B\alpha A$	$B\alpha C$	$B\gamma D$	$B\gamma E$
$C\alpha C$	$C\alpha A$	$C\alpha B$	$C\beta D$	$C\beta E$
$D\alpha D$	$D\gamma A$	$D\gamma B$	$D\gamma C$	$D\beta E$
$E\alpha D$	$E\gamma A$	$E\gamma B$	$E\gamma C$	$E\gamma D$

Мы приходим, таким образом, к заключению, что все приведенные восемь постулатов сравнения *н е з а в и с и м ы*.

Вместе с тем мы видим, что как совместность, так и независимость постулатов сравнения обнаруживается непосредственным созерцанием существующих объектов (множеств). В этом заключается материалистический характер всего рассуждения.

Вместе с тем устанавливается и метод доказательства совместности и независимости ряда посылок. Если этих посылок n , то их совместность и независимость доказываются построением $(n + 1)$ реальных множеств, в одном из которых осуществляются все n посылок, а в каждом из остальных осуществляются $(n - 1)$ посылок, т. е. все посылки, кроме одной, независимость которой этим доказывается. Этот метод мы применим и к доказательству совместности (непротиворечивости) и независимости надлежащим образом формулированных постулатов геометрии.

6. Аксиоматическое определение. Закончим одним выводом, непосредственно вытекающим из предыдущих рассуждений. Чем собственно определяется понятие «величина»? Оно определяется восемью независимыми постулатами, связывающими отношения элементов множества, составляющего рассматриваемую величину. Это определение, таким образом, существенно отличается от той формы определения, которая установлена Аристотелем. Понятие здесь определяется не родовым понятием и видовыми отличиями, его характеризующими, а рядом постулатов. Отсюда двойное заключение: во-первых, постулаты по существу не отличаются от определений, а во-вторых, постулаты в своей совокупности определяют понятие. Такого рода определение в настоящее время называют *а к с и о м а т и ч е с к и м* в противоположность аристотелевым определениям. Мы увидим, что определения всех понятий геометрии осуществляются аксиоматически. Вместе с тем из постулатов (аксиом), входящих в это определение, и выводится вся геометрия строго логическим путем.

§ 82. ПОСТУЛАТЫ РАСПОЛОЖЕНИЯ И СТРУКТУРЫ

1. План изложения. Только в последней четверти XIX столетия сложились те принципы, на основе которых можно строить действительно рациональную аксиоматику геометрии. Эти принципы состоят главным образом в том, что основные понятия должны быть выведены за пределы геометрии и даже математики, что определения должны получить аксиоматический характер и на базе их выводы должны быть строго логическими. Определения основных понятий должны, таким образом, по существу

совпадать с аксиомами или постулатами, которые должны быть непротиворечивы и независимы. В соответствии с этим в последней четверти истекшего столетия появляются первые работы, в которых основы геометрий строятся уже на существенно иных началах, чем это было сделано Евклидом, его многочисленными комментаторами и даже Лежандром. Первые работы в этом направлении принадлежат Пашу (M. Pasch [79]) в Германии и Пеано (G. Peano [80], [81]), Веронезе (G. Veronese [82]), Пиери (M. Pieri [83]), Падоа (A. Padoa [84]) в Италии. Завершение этой работы не вполне заслуженно связывают с именем Гильберта (D. Hilbert [85]). Этому вопросу посвящена и работа автора [86], т. 1. Подробного изложения идей и методов этих авторов мы здесь давать не будем. Читатель найдет это в книге «Основания геометрии» [86], т. 2, автора настоящего сочинения, выпущенной в 1907 г., и в книге Дена (M. Dehn [87]).

Самое построение евклидовой геометрии может быть выполнено двояким путем. Можно строить геометрию и прежде всего ее аксиоматику так, чтобы она охватывала всю геометрию трехмерного евклидова пространства. Можно аксиоматику разворачивать постепенно, устанавливая сначала аксиоматику прямой, потом плоскости и, наконец, трехмерного пространства. Первого пути придерживается Гильберт в своих «Основаниях геометрии», второй путь ведет свое начало главным образом от Паша.

Мы намерены здесь следовать этому второму пути и соответственно этому начнем с аксиоматики евклидовой прямой; впрочем, излагаемое здесь построение носит по существу более общий характер и охватывает широкий класс так называемых линейных многообразий.

Как известно, Гильберт разбивает всю совокупность аксиом, определяющих трехмерное евклидово пространство E_3 , на пять групп. Такое разбиение по существу целесообразно, так как и весь материал евклидовой геометрии естественно распадается на части, определяемые то одними, то другими аксиомами. В применении к одномерному пространству из схемы Гильберта остаются только три группы. В своем изложении мы, однако, несколько отступаем от системы Гильберта в целях более отчетливого выявления независимости аксиом.

2. Постулаты (аксиомы) расположения или порядка. Уже Гаусс указал (в письме к Ф. Больаи от 6 марта 1832 г.¹⁾), что понятие «между» нуждается в строгой формулировке, т. е. в аксиоматическом обосновании. С этим понятием тесно связаны такие понятия, как «внутри» и «вне», «по одну сторону» и «по разные стороны», которыми традиционная геометрия пользуется чисто интуитивно, но которые при рациональном построении геометрии требуют точного определения; и это, замечает Гаусс, «хорошо осуществляется, но я не вижу, чтобы это где-либо было сделано». Впервые это было выполнено, хотя и в недостаточно совершенной форме, Пашем в сочинении, которое мы уже цитировали. Схема Паша подверглась переработке со стороны Пеано [80], [81], Амодео (F. Amodeo [89]), Фано (G. Fano [90]), Энрикеса (F. Enriques [91]), Пиери [92], [93] и др., главным образом итальянских геометров; наиболее тщательно в применении к линейному (одномерному) многообразию это впервые, как отмечает и Гильберт, выполнил английский математик Гэнтингтон (E. V. Huntington [94]). Один из вариантов такой обработки, на наш взгляд наиболее целесообразный, излагается ниже.

¹⁾ [83], р. 222, подстрочное примечание.

Аксиомы, или постулаты (мы предпочитаем последнее наименование), служащие для установления понятия «между» и других понятий, из него вытекающих, называют п о с т у л а т а м и р а с п о л о ж е н и я и л и п о р я д к а. Существо замысла Паша и его последователей заключается в следующем.

Пусть L будет некоторое множество, элементы которого будем называть т о ч к а м и; самое множество, поскольку оно удовлетворяет указанным ниже постулатам, будем называть п р я м о й. Три различные точки A, B, C прямой могут быть связаны соотношением, которое мы символически обозначаем через ABC , а в словах выражаем «точка B лежит между точками A и C » или «точки A, B, C имеют расположение ABC »; это соотношение аксиоматически определяется приведенными ниже постулатами. Мы покажем, что множества, в которых такое соотношение имеет место, существуют; соответственно этому именно такого рода множество с установленным в нем понятием «между» мы и будем обозначать через L .

3. Перечень постулатов расположения. Группу постулатов расположения будем обозначать цифрой I и соответственно этому будем их нумеровать.

I_1 . Если точка B прямой лежит между A и C , то она лежит также между C и A .

Можно сказать, что соотношение ABC допускает транспозицию точек A и C .

I_2 . Из любых трех различных точек A, B, C прямой, по крайней мере, одна лежит между двумя другими.

I_3 . Если точка B лежит между A и C , то точка C не лежит между A и B .

Иначе говоря, расположение ABC исключает ACB . Заметим, что совместное выполнение постулатов $I_1 - I_3$ приводит к тому, что из шести допустимых расположений трех различных точек прямой

$ABC, CBA, ACB, BCA, BAC, CAB$

всегда имеют место два и только два.

I_4 . Если на прямой точка B лежит между A и C , а точка D лежит между A и B , то точка D лежит между A и C .

Теорема 1. Если точка B лежит между A и C , а точка D лежит между B и C , то она лежит также между A и C .

Дано: ABC, BDC .

Из ABC следует CBA (I_1); из BDC следует CDB (I_1); из CBA и CDB в силу постулата I_4 получаем, что имеет место CDA , а поэтому, транспонируя точки C и A , и ADC .

I_5 . Если на прямой точка B лежит между A и C , а точка D , отличная от B , также лежит между A и C , то имеет место, по крайней мере, одно из двух расположений ADB или BDC .

Естественно возникает вопрос, могут ли расположения ADB и BDC существовать совместно. Отрицательный ответ на этот вопрос выражает

Теорема 2. Если на прямой точка B лежит между A и C , то никакая точка этой прямой не может лежать одновременно между A и B и между B и C .

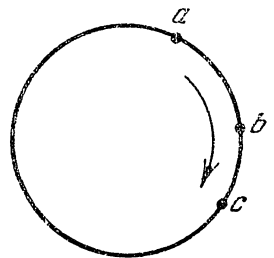
Доказательство ведется от противного. Допустим, что расположения ADB и BDC (при ABC) существуют совместно. Согласно постулату I_4 они влекут за собой расположение ADC . Из совместного существования расположений ADC и ABC следует (I_5), что должно иметь место, по крайней мере, одно из расположений ABD или DBC . Но расположение ABD не может иметь места, так как по предположению имеет место ADB (I_3); расположение DBC не может иметь места, так как по предположению имеем BDC (I_3). Теорема доказана.

4. Непротиворечивость постулатов расположения. Паш, с именем которого обыкновенно связывают учение о расположении точек прямой, устанавливает восемь, во втором издании даже девять, аксиом, или постулатов, расположения (три из них мы выделили в группу аксиом структуры). Он называет их в первом издании «Grundsätze» («основные положения»), во втором издании «Kernsätze»; трудно уяснить, какое различие он усматривает между этими терминами. Приведенные выше постулаты I_1 и I_2 у Паша завуалированы в определениях; некоторые его положения могут быть выведены из остальных; это привело к необходимости выяснить независимость постулатов; выполнено это с необходимой тщательностью Гётингтоном.

Следуя общей установке современной аксиоматики, здесь необходимо прежде всего выяснить, являются ли постулаты непротиворечивыми и независимыми. Обнаружить их непротиворечивость очень легко, пользуясь аналитическим пространством L . Примем за L множество всех действительных чисел, которое в дальнейшем будем обозначать через R . (Отметим, что арифметику действительных и обыкновенных комплексных чисел считаем построенной.) Чтобы подчеркнуть геометризацию этого множества, будем называть его элементы (действительные числа) точками. Будем считать, что точка b лежит между точками a и c (имеет место расположение abc), если $a < b < c$ или $a > b > c$, т. е. если число b лежит между числами a и c в арифметическом значении этого слова. Совершенно ясно, что в этом множестве все постулаты расположения (I_1 — I_5) выполнены, а поэтому в силу общих положений эти постулаты непротиворечивы. Отметим, что все постулаты расположения выполняются также и в множестве R_a всех действительных алгебраических чисел и в множестве R_r всех действительных рациональных чисел.

5. Независимость постулатов расположения. Теперь покажем, что ни один из постулатов I_1 — I_5 не зависит от остальных. Начиная, естественно, с постулата I_1 , положим, что множество L состоит из всех точек обыкновенной окружности в евклидовой плоскости (черт. 104), и будем считать, что точка b лежит между a и c , когда передвижение от a к c через b происходит по часовой стрелке. Легко видеть, что все постулаты I_2 — I_5 выполняются, между тем как требование постулата I_1 здесь не выполняется. Можно это показать и не прибегая к окружности, если считать, что точка b лежит между a и c только в том случае, когда переход от a к c происходит через точку b при движении на прямой слева направо.

Эти соображения можно провести и чисто аналитическим путем, а именно, за множество L примем множество R , в котором будем считать



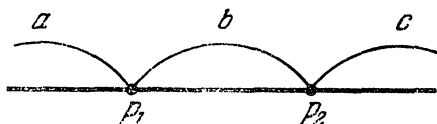
Черт. 104.

элемент b лежащим между a и c только в том случае, если выполняется лишь одно двойное неравенство $a < b < c$.

Чтобы обнаружить независимость постулата I_2 от остальных, предположим, что множество L состоит из всех точек евклидовой плоскости; понятие же «между» установлено обычным путем. В этом случае постулаты I_1, I_3, I_4, I_5 выполнены, а постулат I_2 не выполняется. Постулат I_2 характеризует как бы одномерность рассматриваемого пространства (множества)¹⁾.

Чтобы обнаружить независимость постулата I_3 от остальных постулатов расположения, будем считать на множестве L — множестве R всех действительных чисел — каждую точку лежащей между любыми двумя другими точками. Постулаты I_1, I_2, I_4, I_5 выполнены, а постулат I_3 в этом случае не имеет места.

Для доказательства независимости постулата I_4 от остальных постулатов расположения примем за L множество R всех действительных



Черт. 105.

чисел, но в нем установим понятие «между» так, что оно по отношению к некоторым элементам отличается от обычного. Именно фиксируем на этом множестве две точки (два числа) p_1 и p_2 ($p_1 < p_2$) (черт. 105). Тогда все остальные числа распадутся на три категории: числа $a < p_1$,

числа b , большие p_1 и меньшие p_2 ($p_1 < b < p_2$), и числа $c > p_2$. В отношении любых точек (чисел) множества L мы будем считать одну лежащей «между двумя другими», когда это число действительно расположено между ними в арифметическом значении этого слова, за следующими, однако, исключениями: 1) к числам, лежащим между любым a и p_1 , мы приобщим число p_2 ; 2) к числам, лежащим между любым числом c и p_2 , приобщим число p_1 ; 3) из чисел, содержащихся между a и p_2 , исключим число p_1 ; 4) из чисел, содержащихся между любым числом c и p_1 , исключим число p_2 ; 5) во всех этих случаях будем считать в согласии с постулатом I_1 , что число p_2 , лежащее между a и p_1 , лежит также между p_1 и a ; это значит, что имеют место расположения ap_2p_1 , p_1p_2a , но не имеют места естественные расположения ap_1p_2 , p_2p_1a ; совершенно также будем считать, что имеют место расположения cp_1p_2 и p_2p_1c , но не имеют места естественные расположения p_1p_2c и cp_2p_1 .

¹⁾ Покажем, как можно провести это же самое доказательство, освободив его от наглядных, но при аксиоматическом изложении еще не определенных образов.

Предположим, что множество L состоит из всех пар $b \equiv (x, y)$, где x и y принадлежат множеству R всех действительных чисел. Две точки $b_1(x_1, y_1)$ и $b_2(x_2, y_2)$ считаются совпавшими тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Понятие «между» определим следующим образом: будем считать, что точка $b \equiv (x, y)$ лежит между точками $a \equiv (x_1, y_1)$ и $c \equiv (x_2, y_2)$, если имеет место равенство

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1) \quad (1)$$

и, кроме того,

$$x_1 \leq x \leq x_2 \quad \text{или} \quad x_1 \geq x \geq x_2 \quad (2)$$

и

$$y_1 \leq y \leq y_2 \quad \text{или} \quad y_1 \geq y \geq y_2, \quad (3)$$

причем: 1) любое из двойных неравенств (2) может сочетаться с любым из двойных неравенств (3); 2) или неравенства (2) или неравенства (3) могут оказаться равенствами (например, $x_1 < x < x_2$, $y_1 = y = y_2$). В этом случае постулаты I_1, I_3, I_4, I_5 выполнены, а постулат I_2 не выполняется.

При этих соглашениях, несмотря на все введенные модификации расположения элементов числового ряда, постулаты I_1, I_2, I_3, I_5 остаются в силе. Действительно, те точки нашего множества, в состав которых точки (числа) p_1 и p_2 не входят, сохраняют расположение, удовлетворяющее всем постулатам. Однако легко видеть, что модификации произведены так, что постулаты I_1 и I_2 выполняются также для трех точек, в состав которых входит одна из точек (чисел) p_1 и p_2 или даже обе. Убедимся, что выполняется постулат I_3 . Мы должны для этого рассмотреть прежде всего комбинации a, a', p_1 ; a, c, p_1 ; c, c', p_1 и аналогичные комбинации, в которых p_1 заменена точкой p_2 . В комбинации a, a', p_1 при $a' > a$ сохраняется расположение $aa'p_1$; точка a' лежит между a и p_1 , модификации же отнюдь не помещают ни элемента p_1 между a и a' , ни элемента a между a' и p_1 ; постулат I_3 остается в силе; то же относится и к остальным перечисленным комбинациям. Рассмотрим теперь комбинацию ap_1p_2 . Согласно положениям 1), 5) точка p_2 лежит между a и p_1 (имеют место расположения ap_2p_1 и p_1p_2a), согласно же положению 3) не имеют места расположения ap_1p_2 или p_2p_1a ; постулат I_3 остается в силе. Читатель сам проследит, что и при остальных комбинациях постулат I_3 выполняется. Обращаясь к постулату I_5 , мы должны также рассмотреть лишь те случаи, когда в комбинацию ABC , о которой идет речь в постулате I_5 , входит, по крайней мере, одна из точек p_1, p_2 . Рассмотрим комбинацию $aa'p_1$ ($a' > a$). Четвертой точкой (числом), лежащей между a и p_1 , может быть либо точка a'' , либо точка p_2 , которая расположена между любой точкой a и p_1 (положение 1)). В первом случае точка a'' лежит между a и a' , если $a'' < a'$, и между a' и p_1 , если $a'' > a'$; во втором случае имеет место расположение $a'p_2p_1$ (положение 1)); постулат I_5 соблюден. Предоставляя читателю рассмотреть самому другие возможные комбинации, остановимся еще на комбинации ap_2p_1 . В этом случае четвертой точкой, расположенной между a и p_1 (отличной от p_2), может служить только любое число $a' > a$, так что имеет место расположение $aa'p_2$; постулат I_5 , таким образом, выполнен.

Возвращаясь к постулату I_4 , возьмем элементы a, p_1, p_2 , имеющие по нашему специальному установлению расположение ap_2p_1 . Любой элемент b ($p_1 < b < p_2$) расположен между ap_2 , но он не лежит между a и p_1 ¹⁾. Постулат I_4 , таким образом, не выполнен и потому не зависит от остальных постулатов расположения.

Для доказательства независимости постулата I_5 составим множество L из совокупности всех действительных чисел, к которым присоединим мнимые числа вида ci (будем называть их точками C), где c — любое положительное число, меньшее некоторого числа d ($0 < c < d$). Через a будем обозначать положительные ($a > 0$), через b — отрицательные ($b < 0$) числа и именовать их соответственно точками A и B . Относительно трех точек A , трех точек B (включая в каждом случае и точку O) будем принимать обыкновенное их расположение; для трех точек C принимаем расположение в соответствии со значениями c . За точки, лежащие между A и C , будем принимать все точки A' , у которых $a' < a$, и все точки C' , если $c' < c$, а также точку O . За точки, лежащие между B и C , будем принимать все точки B' , если $b < b'$, и все точки C' , если $c' < c$, а также точку O . За точки, лежащие между A и B , будем

¹⁾ Здесь имеет место натуральное расположение abp_2 , но точка p_2 перемещена и находится между a и p_1 , между тем точка b не перемещена и не лежит между a и p_1 .

принимать все точки, действительно между ними арифметически лежащие, с присоединением к ним всех точек C (т. е. чисел ci). При этом постулаты I_1 и I_2 явно выполнены. Но выполнен и постулат I_3 . Это ясно, если три точки принадлежат одной и той же категории A, B или C . Точно так же, если имеет место расположение $AA'B$, то точка B не лежит между A и A' , т. е. расположение $AA'B$ исключает ABA' . Читатель, перебрав все остальные комбинации, убедится, что постулат I_3 всегда оправдывается. Оправдывается также во всех случаях и постулат I_4 . Действительно, оставляя в стороне случай обычного расположения точек, возьмем комбинацию $AA'C$ в этом расположении; если точка D лежит между A и A' (или между A' и C), то она явно лежит между A и C . Если возьмем комбинацию ACB (имеющую всегда это расположение) и точку D между A и C , то она также лежит между A и B . И здесь читатель легко переберет все возможные случаи и убедится, что постулат I_4 в этом примере всегда выполняется.

Если теперь возьмем точки A, O, B и четвертую точку C , то имеем AOB и ACB , но не имеет места ни расположение ACO , ни OCB . Постулат I_5 , таким образом, не выполняется; он не зависит от остальных.

Общий вывод заключается в том, что установленные пять постулатов расположения непротиворечивы и независимы.

6. Постулаты структуры. Все постулаты расположения говорят только о порядке точек — элементов рассматриваемого множества. Состав самого множества ни в коей мере ими не характеризуется; так, постулат I_5 устанавливает только, что при наличии в множестве L четырех точек, из которых две C и D лежат между двумя другими A и B , имеет место также, по крайней мере, одно из двух расположений ACD . DCB . Но имеются ли в рассматриваемом множестве такие четыре точки, получает ли, таким образом, постулат действительное применение, этот вопрос остается открытым; постулаты расположения этого не предусматривают. Для охарактеризования состава множества L необходимы другие постулаты, которые мы считаем целесообразным выделить в особую группу II под названием постулатов структуры.

Π_1 . На прямой есть, по крайней мере, две точки.

Необходимость этого постулата совершенно очевидна: он представляет собой предпосылку для осуществления всех постулатов расположения и дальнейших постулатов структуры.

Π_2 . Между любыми двумя точками существует, по крайней мере, одна точка.

Π_3 . Каковы бы ни были точки A и B прямой, на ней всегда существует, по крайней мере, одна такая точка C , что точка B лежит между A и C .

Совершенно ясно, что отсюда и из постулатов расположения вытекает, что каждым двум точкам A и B прямой всегда отвечает, по крайней мере, одна такая точка C , что A лежит между C и B .

Введенные три постулата структуры совместимы с постулатами расположения, что следует хотя бы из того, что постулаты обеих групп выполняются во множествах R и R_r (множестве всех действительных и множестве всех рациональных чисел). Во множестве R_n всех целых чисел при обычном понимании в нем термина «между» постулат Π_2 явно не выполняется, тогда как все остальные постулаты групп I и II в нем получают осуществление. Постулат Π_2 поэтому не зависит от осталь-

ных постулатов. Точно так же и постулат Π_3 не зависит от остальных. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть множество, состоящее из всех отрицательных чисел и нуля; если за A примем одно из отрицательных чисел, за B — нуль, то числа (точки) C , при котором имеет место предусмотренное постулатом Π_3 расположение ABC , не существует; между тем все остальные постулаты обеих групп в этом множестве получают осуществление. О независимости постулата Π_1 говорить не приходится, так как он, как уже было указано выше, представляет собой предпосылку, без которой ни один из остальных постулатов не может получить осуществления.

Таким образом постулаты обеих групп в совокупности совместны и независимы.

Множество (прямую), на котором осуществляются все постулаты расположения и структуры, будем обозначать через L_{II} .

§ 83. ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ ОБРАЗЫ И РАЗБИЕНИЕ ИХ ТОЧКОЙ

1. Прямолинейные образы. Во всякой геометрической системе некоторая совокупность точек — элементов множества — называется образом; можно сказать, что образ есть подмножество в составе того множества, которое служит объектом (субстратом) рассматриваемой геометрической системы. Образы прямой L_{II} будем называть прямолинейными образами. Точка прямолинейного образа называется внутренней, если она расположена между какими-либо двумя точками этого образа; она называется крайней, если не существует двух точек этого образа, между которыми она лежит.

Теорема 1. Вся прямая L_{II} не имеет крайних точек.

В самом деле, если B — какая-либо точка прямой, а A — другая ее точка, то в силу постулата Π_3 всегда существует такая точка C , что B лежит между A и C , т. е. B есть внутренняя точка множества L_{II} .

Теорема 2. Если какой-либо образ прямой L_{II} имеет две крайние точки, то всякая другая точка этого образа лежит между ними.

В самом деле, пусть A и B будут две крайние точки образа, C — третья его точка. Согласно постулату I_2 одна из трех точек A, B, C должна лежать между двумя другими. Но ни одна из точек A и B , как крайняя, не может лежать между двумя другими; следовательно, точка C лежит между точками A и B .

Как непосредственное следствие из предыдущего вытекает следующее предложение.

Теорема 3. Никакой образ прямой не может иметь более двух крайних точек.

2. Отрезок и интервал прямой. Отрезком, или сегментом, прямой L_{II} называется образ, состоящий из двух точек прямой A и B , называемых крайними точками отрезка, и всех точек этой прямой, лежащих между ними и называемых внутренними точками отрезка.

Теорема 4. Прямолинейный отрезок на L_{II} содержит бесчисленное множество точек.

В самом деле, пусть A и B будут крайние точки отрезка, C — внутренняя его точка, так что имеет место расположение ACB . Пусть D будет точка, лежащая между A и C (Π_2). Эта точка отлична не только

от A и C , но и от B , ибо точка B не лежит между A и C (I_3). В силу постулата I_4 точка D также лежит между A и B . Если E есть точка, лежащая между A и D , то она лежит также между A и C (I_4), следовательно, отлична от C ; в силу того же постулата I_4 , она лежит также между A и B и отлична от B . Это рассуждение можно повторить неограниченное число раз.

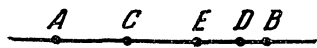
Отрезок, имеющий крайними точками A и B , будем обозначать через AB или через BA . Отрезок, в котором опустим его крайние точки, будем называть интервалом.

Теорема 5. Три точки прямой L_{II} определяют на ней три отрезка AB , BC , CA : каждая четвертая точка D прямой либо не принадлежит ни одному из этих трех отрезков, либо принадлежит двум из них.

Доказательство. Положим, что наши точки имеют расположение ABC (I_2). Если четвертая точка D принадлежит отрезку AB , то в силу постулата I_4 она принадлежит также отрезку AC , а в силу теоремы 2 § 82 она не принадлежит отрезку BC . По тем же соображениям, если точка D принадлежит отрезку BC , то она принадлежит отрезку AC и не принадлежит отрезку AB . Наконец, если точка D , отличная от B , принадлежит отрезку AC , то она принадлежит одному из отрезков AB или BC и не принадлежит другому из них (постулат I_5 и теорема 2 § 82).

Теорема 6. Если крайние точки отрезка CD на L_{II} принадлежат отрезку AB , то и все точки отрезка CD принадлежат отрезку AB .

Доказательство. Мы можем опустить тот случай, когда точки C , D совпадают с A , B ; начнем с того случая, когда одна из крайних точек отрезка CD совпадает с одной из крайних точек отрезка AB , скажем, точка C совпадает с A ; тогда точка D лежит между A и B и каждая точка отрезка CD принадлежит отрезку AB в силу постулата I_4 . Так же об-



Черт. 106.

стоит дело, если точка D совпадает с B (только применять в этом случае надо теорему 1 § 82). Положим теперь, что точка C лежит между A и B , а точка D отлична от A и B (черт. 106); в силу постулата I_5 и теоремы 2 § 82 точка D лежит в этом случае либо внутри отрезка AC , либо внутри отрезка CB . Пусть D принадлежит CB , так что имеет место расположение CDB . Пусть E будет внутренняя точка отрезка CD , в силу постулата I_4 она лежит между C и B , а потому в силу теоремы 1 § 82 — между A и B , т. е. принадлежит отрезку AB (лежит внутри его).

Если крайние точки отрезка CD принадлежат AB , то будем CD называть частью отрезка AB .

3. Группа точек прямой. Совокупность конечного числа различных точек (больше одной) прямой будем называть прямолинейной группой точек.

Теорема 7. На прямой L_{II} всякая группа точек имеет две крайние точки.

Доказательство проведем, используя метод математической индукции. Если группа состоит из двух точек, теорема, очевидно, справедлива. Допустим, что она справедлива относительно групп l_n , содержащих n точек. Покажем, что она остается в силе по отношению к группе l_{n+1} , состоящей из $n+1$ точек.

Так как в силу теоремы 3 крайних точек может быть не более двух, то среди $n+1 > 2$ имеется, по крайней мере, одна внутренняя. Пусть M — внутренняя точка группы l_{n+1} ; исключив ее, получим группу l_n ; она имеет две крайние точки A и B . Так как точка M есть внутренняя точка группы l_{n+1} , то она лежит между двумя ее точками C и D ; эти последние в свою очередь принадлежат отрезку AB ; в силу теоремы 6 отсюда следует, что точка M есть внутренняя точка отрезка AB . Это значит, что A и B суть крайние точки группы l_{n+1} .

Теорема 8. На прямой L_{II} точки группы, содержащей n точек, можно перенумеровать числами $1, 2, 3, \dots, n$ таким образом, чтобы точка M_i лежала между точками M_j и M_h всякий раз, когда число i лежит между числами j и h (это можно выполнить двумя способами, присваивая номер 1 одной из крайних точек группы, а n — другой, или наоборот).

Это явно справедливо относительно групп, содержащих по две точки. Положим, что теорема справедлива для групп, содержащих по n точек. Покажем, что она справедлива также для группы, содержащей $n+1$ точек. Пусть A и C будут крайние точки этой группы (теорема 7). Отбросив точку C , получим группу l_n , имеющую крайние точки A и C' . Перенумеровав эти точки так, чтобы точки A и C' носили номера 1 и n , присвоим точке C номер $n+1$; наша цель достигнута. Отбросив точку A , получим группу точек, имеющую крайними точками A' и C ; перенумеровав их так, чтобы точка C носила номер 1, а точка A' — номер n , и присвоив номер $n+1$ точке A , получим вторую нумерацию, удовлетворяющую требованиям теоремы. Такую нумерацию точек группы будем называть последовательной.

Теорема 9. Четыре точки прямой L_{II} можно обозначить буквами A, B, C, D так, чтобы A и D были крайними точками группы, чтобы точка B лежала между A и C , а точка C — между B и D .

Перенумеровав точки группы так, как это требует предыдущая теорема, обозначим точку 1 через A , точку 2 через B , точку 3 через C , а точку 4 через D , — цель явно будет достигнута. В первом издании своих «Оснований» Гильберт принял это предложение за одну из аксиом расположения точек на прямой.

Теорема 10. Если точка B на L_{II} лежит между A и C , а C лежит между A и D , то точки A, B, C, D имеют расположение, указанное в теореме 9 (A, B, C, D) (черт. 107).

В самом деле, при условиях задания B и C суть внутренние, а потому (теорема 7) A и D суть крайние точки рассматриваемой группы. Следовательно, точки B и C лежат между A и D . В силу постулата I_5 и теоремы 2 § 82 точка C должна лежать или между A и B , или между B и D ; но между A и B она не может лежать, так как B лежит между A и C (I_3); следовательно, она лежит между B и D ; это и составляет содержание теоремы.



Черт. 107.

4. Разбиение прямолинейного образа на L_{II} . Относительно нескольких образов на L_{II} говорят, что они не покрывают друг друга, если ни одна внутренняя точка одного образа не принадлежит другому. В этих терминах теорему 2 § 82 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 11. Если точка B на L_{II} лежит между точками A и C , то отрезки AB и BC не покрывают друг друга. Эта теорема допускает следующее обобщение.

Теорема 12. Если точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ на прямой L_{II} перенумерованы последовательно, то отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ не покрывают друг друга.

Доказательство. Принимая во внимание, что теорема справедлива для случая $n=3$, проведем доказательство индуктивно. Допустим, что она справедлива для $n-1$ точек. Тогда отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-2}A_{n-1}$ друг друга не покрывают. Остается только обнаружить, что отрезок $A_{n-1}A_n$ ни одного из остальных отрезков не покрывает. Допустим, что точка B отрезка $A_{n-1}A_n$ принадлежит отрезку A_iA_{i+1} ($i+1 \leq n-1$). Так как точки A_i и A_{i+1} принадлежат отрезку A_1A_{n-1} (ввиду последовательности нумерации), то точка B должна принадлежать отрезку A_1A_{n-1} (теорема 6). С другой стороны, точка A_{n-1} лежит между A_1 и A_n . Если бы сделанное допущение было возможно, то точка B лежала бы между A_1 и A_{n-1} и в то же время между A_{n-1} и A_n ; это не может быть в силу теоремы 2 § 82. Следовательно, предыдущее рассуждение устанавливает, что ни одна внутренняя точка какого-либо отрезка A_iA_{i+1} не лежит между A_{n-1} и A_n .

Теорема доказана.

Если образ p и образы $p_1, p_2, \dots, p_n$, не покрывающие друг друга, расположены на L_{II} таким образом, что каждая точка образа p принадлежит, по крайней мере, одному из образов $p_1, p_2, \dots, p_n$ и, обратно, каждая точка любого из образов $p_1, p_2, \dots, p_n$ принадлежит образу p , то говорят, что образ p состоит из образов $p_1, p_2, \dots, p_n$. Предоставляем читателю, основываясь на теореме 12, провести индуктивное доказательство следующего предложения.

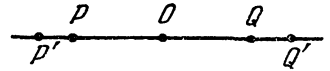
Теорема 13. Если точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ множества L_{II} перенумерованы последовательно, то отрезок A_1A_n состоит из отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$.

5. Разбиение прямолинейного образа на L_{II} одной из его внутренних точек. Мы теперь несколько расширим терминологию, которой мы до сих пор пользовались при описании расположения точек на прямой L_{II} . Если точка O лежит между точками A и B , то мы будем говорить, что точки A и B лежат по разные стороны точки O . Если же точка O , отличная от точек A и B , не лежит между точками A и B , то будем говорить, что точки A и B лежат по одну сторону точки O . В этой терминологии теорему 5 можно формулировать следующим образом.

Теорема 14. Из трех пар точек, которые можно составить из трех точек A, B, C прямой L_{II} (AB, BC, CA), либо точки каждой пары лежат по одну сторону четвертой точки O прямой, либо точки одной пары лежат по одну сторону точки O , тогда как точки каждой из двух других пар лежат по разные стороны точки O .

Теорема 15. Каждая внутренняя точка O прямолинейного образа на L_{II} разбивает все остальные его точки на две категории таким образом, что две точки одной категории расположены по одну сторону точки O , а две точки различных категорий расположены по разные стороны точки O .

Доказательство. Пусть P и Q будут две точки заданного образа (черт. 108), между которыми лежит точка O . Отнесем к первой категории точку P и все те точки P' , которые лежат с P по одну сторону точки O , а ко второй категории отнесем точку Q и все те точки Q' , которые лежат с Q по одну сторону точки O . Покажем, что этим действительно произведено разбиение образа на две требуемые категории. Прежде всего заметим, что в силу предыдущей теоремы точка P' , включенная в первую категорию, не может попасть в то же время во вторую категорию. Пусть теперь P' и P'' будут две точки первой категории; значит, как точки P и P' , так и точки P и P'' расположены по одну сторону точки O ; значит, в силу предыдущей теоремы точки P' и P'' лежат по одну сторону точки O . Точно так же, если точка P' первой категории, а точка Q' второй категории, то P' и Q' лежат по разные стороны точки O . Теорема доказана.



Черт. 108.

Присоединим еще только два замечания. Во-первых, отметим, что это разбиение однозначно, оно не зависит от того, какие точки P и Q взяты за определяющие точки первой и второй категорий; если точка P попадает в одну категорию, то вместе с ней попадает всякая точка P' , лежащая с ней по одну сторону O ; точка же Q неизбежно попадает в другую категорию, а с ней и все точки Q' , лежащие с Q по одну сторону O . Во-вторых, любые две точки одной категории расположены по одну сторону каждой точки другой категории; предоставляем читателю это доказать.

6. Прямолинейные лучи. На прямой L_{II} всякая точка O есть внутренняя и потому производит разбиение, о котором шла речь в предыдущем предложении. Точка O совместно со всеми точками прямой, лежащими по одну сторону O (совместно со всеми точками одной категории разбиения) называется лучом; точка O есть крайняя точка луча, ее называют также вершиной луча; все остальные точки луча — внутренние. Если O есть вершина, P — другая (внутренняя) точка луча, то луч обозначают через OP . Совершенно ясно, что для обозначения луча за точку P может быть взята любая его внутренняя точка. Предложение о разбиении в применении к целой прямой может быть сформулировано так.

Теорема 16. Каждая точка O прямой L_{II} разбивает ее на два луча, общей вершиной которых служит точка O .

Говорят, что эти два луча составляют продолжения друг друга. Два луча, составляющих продолжения друг друга, кроме общей вершины, общих точек не имеют — не покрывают друг друга.

7. Разбиение луча внутренней точкой. Пусть A будет вершина, B — внутренняя точка луча, так что этот луч можно обозначить через AB . Пусть B' будет такая точка луча AB , что B лежит между A и B' . Отрезок AB и луч BB' не покрывают друг друга; в самом деле, точка B' не лежит внутри отрезка AB , и если C есть другая точка луча BB' , то точки C и B' лежат по одну сторону точки B , и так как A и B' лежат по разные стороны точки B , то A и C также лежат по разные стороны точки B , т. е. точка C не лежит внутри отрезка AB .

Луч BB' называют продолжением отрезка AB в сторону его крайней точки B .

Теорема 17. Луч AB на L_{II} состоит из отрезка AB и его продолжения BB' в сторону точки B .

В самом деле, если C есть точка луча AB , то она расположена с B по одну сторону точки A , поэтому имеет место одно из двух расположений ACB или ABC ; в первом случае она принадлежит отрезку AB , во втором — продолжению отрезка AB в сторону B . Читатель легко обнаружит, что и обратно, каждая точка отрезка AB и каждая точка луча BB' принадлежат лучу AB .

Легко доказывается следующее предложение.

Теорема 18. Две точки A и B прямой L_{II} разбивают ее на три части: на отрезок AB и два луча AA' и BB' , составляющих продолжение отрезка AB в стороны точек A и B . (Прямая состоит из отрезка AB и его продолжений.)

§ 84. ДВЕ СТОРОНЫ ПРЯМОЙ

1. Сонаправленные и противоположенные лучи. Если два луча прямой L_{II} расположены на ней так, что один из них целиком принадлежит другому, то говорят, что эти лучи сонаправлены или обращены на этой прямой в одну сторону; если же такое расположение не имеет места, т. е. если ни один из двух лучей не составляет части другого, то говорят, что лучи противоположены или обращены в противоположные стороны. Из предыдущего ясно, что два луча прямой L_{II} , составляющих продолжения друг друга, обращены в противоположные стороны. Из теоремы 18 § 83 следует, что лучи AB и BA , каковы бы ни были точки A и B , имеют общий отрезок AB и других общих точек не имеют, а потому обращены в противоположные стороны.

Если A и B суть вершины двух лучей, обращенных в одну сторону, причем луч, выходящий из точки B , принадлежит лучу, выходящему из точки A , то точка B лежит внутри последнего луча, который поэтому может быть обозначен через AB . Второй луч (выходящий из вершины B) не может совпадать с BA , ибо лучи AB и BA обращены в противоположные стороны; этот луч может быть поэтому обозначен через BB' , где точки A и B' расположены по разные стороны точки B ; он представляет собой продолжение отрезка AB в сторону точки B . Выразим этот результат в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Два луча на L_{II} , обращенных в одну сторону, всегда могут быть обозначены через AB и BB' , где точки A и B' расположены по разные стороны точки B ; луч BB' целиком лежит внутри луча AB и совпадает с продолжением отрезка AB в сторону точки B .

Рассмотрим взаимное расположение двух лучей прямой L_{II} , обращенных в противоположные стороны. Если эти лучи имеют общую вершину, то они составляют продолжения один другого. Положим, что рассматриваемые лучи выходят из двух различных точек A и B . Пусть AA' и BB' будут продолжения отрезка AB . Если луч, выходящий из A , есть AB , то лучом, выходящим из B , не может быть BB' , потому что он, как мы видели, обращен в ту же сторону, что и AB ; следовательно, это есть луч BA ; итак, в этом случае рассматриваемыми лучами служат AB и BA . Если луч, выходящий из A , есть AA' ,

то лучом, выходящим из B , не может служить BA , ибо он, по теореме 1, сонаправлен с AA' , вторым лучом служит поэтому BB' . Результат получает выражение в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Если два луча прямой L_{II} обращены в противоположные стороны, то они либо составляют продолжения один другого, либо представляют продолжения отрезка AB , соединяющего их вершины, либо совпадают с лучами AB и BA . И обратно, в каждом из этих трех случаев лучи обращены в противоположные стороны.

2. Сопоставление сторон, в которые обращены три луча. Три луча прямой определяют три пары лучей, стороны обращения которых определенным образом между собой связаны. Это устанавливается следующими теоремами.

Теорема 3. Каждый из двух лучей, обращенных в противоположные стороны (противонаправленных), сонаправлен с продолжением второго луча.

Доказательство. Будем исходить из классификации, установленной предыдущей теоремой. Если рассматриваемые два луча составляют продолжения один другого, то теорема явно справедлива. Если эти лучи составляют продолжения AA' и BB' отрезка AB (черт. 109), то луч AB состоит из отрезка AB и луча BB' (теорема 1), т. е. сонаправлен с BB' ; в то же время луч AB составляет продолжение луча AA' , т. е. луч BB' сонаправлен с продолжением луча AA' . По таким же соображениям луч AA' сонаправлен с продолжением BA луча BB' . Если же рассматриваемые лучи суть AB и BA , то первый из них обращен в ту же сторону, что и луч BB' , составляющий продолжение луча BA ; это явствует из рассуждений предыдущей рубрики. И совершенно также луч BA сонаправлен с продолжением AA' луча AB .

Теорема 4. Каждый из двух сонаправленных лучей на прямой L_{II} противонаправлен с продолжением другого луча.

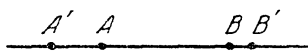
Доказательство аналогично предыдущему и читателя не затруднит.

Теорема 5. Если один и тот же луч AB принадлежит двум различным лучам A_1B_1 и A_2B_2 и не совпадает ни с одним из них, то точки A_1 и A_2 расположены по одну сторону точки A .

Доказательство. Совершенно ясно, что точки A_1 и A_2 в этом случае различны. Допустим, что точка A лежит между точками A_1 и A_2 , так что лучи AA_1 и AA_2 составляют продолжения друг друга; значит, луч AB совпадает либо с лучом AA_1 , либо с лучом AA_2 . Так как луч AB принадлежит A_1B_1 , то последний совпадает с A_1A_2 , значит, луч AB не может совпадать с лучом AA_1 (потому что AA_1 и A_1A_2 противонаправлены), аналогично, луч AB не может совпадать с AA_2 . Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теорема 6. Если один и тот же луч AB на прямой L_{II} принадлежит двум лучам A_1B_1 и A_2B_2 , то последние обращены в одну и ту же сторону.

Доказательство. Если какие-либо два из рассматриваемых трех лучей совпадают, то справедливость предложения очевидна; мы будем поэтому предполагать, что все три луча различны. Согласно предыдущей



Черт. 109.

теореме точки A_1 и A_2 расположены в этом случае по одну сторону точки A (черт. 110). Положим поэтому, что точка A_1 лежит между A и A_2 ; тогда луч A_1A есть продолжение отрезка A_1A_2 в сторону точки A_1 . С другой стороны, так как луч AB входит в состав

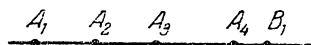


Черт. 110.

луча A_1B_1 , то A есть внутренняя точка последнего и потому луч A_1B_1 совпадает с лучом A_1A , т. е. с продолжением отрезка A_1A_2 . Но A есть также внутренняя точка луча A_2B_2 и последний совпадает поэтому с лучом A_2A или с лучом A_2A_1 , так как точки A и A_1 лежат по одну сторону A_2 . Согласно теореме 17 § 83 луч A_2A_1 состоит из отрезка A_2A_1 и его продолжения A_1A . Итак, луч A_1A , совпадающий с лучом A_1B_1 , принадлежит лучу A_2A_1 , совпадающему с лучом A_2B_2 ; лучи A_1B_1 и A_2B_2 сонаправлены.

Теорема 7. Если два луча A_2B_2 и A_3B_3 на прямой L_{II} принадлежат одному и тому же лучу A_1B_1 , то они обращены в одну и ту же сторону.

Доказательство. Точки A_2 и A_3 , принадлежащие лучу A_1B_1 , расположены по одну сторону его вершины A_1 (черт. 111); примем, что точка A_2 лежит между A_1 и A_3 ; луч A_1B_1 , внутри которого лежат точки A_2 и A_3 , может быть назван A_1A_2 и A_1A_3 . Из точки A_2 выходят лучи A_2A_1 и A_2A_3 , составляющие продолжения друг друга; с одним из них должен совпадать луч A_2B_2 . Но луч A_2A_1 противоположен лучу A_1A_2 ; между тем, луч A_2B_2 , по условию, сонаправлен с лучом A_1A_2 . Следовательно, луч A_2B_2 совпадает с лучом A_2A_3 . Возьмем теперь точку A_4 так, чтобы точка A_3 лежала между A_1 и A_4 ; точки A_1, A_2, A_3, A_4 будут перенумерованы последовательно (теорема 8 § 83), и луч A_3A_4 составляет продолжение отрезка A_1A_3 . Из точки A_3 выходят два луча A_3A_1 и A_3A_4 ; с одним из них должен совпадать луч A_3B_3 . Но луч A_3A_1 противоположен лучу A_1A_3 , а луч A_3B_3 с ним, по условию, сонаправлен; следовательно, луч A_3B_3 совпадет с лучом A_3A_4 . Так как, с другой стороны, точки A_2 и A_4 расположены по разные стороны точки A_3 , то луч A_2A_4 состоит из отрезка A_2A_3 и луча A_3A_4 , т. е. содержит луч A_3A_4 . А так как луч A_2A_4 , как мы видели, совпадает с A_2B_2 , а луч A_3A_4 совпадает с лучом A_3B_3 , то луч A_2B_2 содержит луч A_3B_3 и эти лучи, таким образом, сонаправлены.



Черт. 111.

Теорема 8. Если два луча A_1B_1 и A_2B_2 на прямой L_{II} сонаправлены с третьим лучом AB , то они сонаправлены между собой.

Доказательство. При условиях задания необходимо должна иметь место одна из четырех комбинаций:

- луч AB принадлежит лучу A_1B_1 , и луч A_2B_2 принадлежит лучу AB ;
- луч A_1B_1 принадлежит лучу AB , и луч AB принадлежит лучу A_2B_2 ;
- луч AB принадлежит лучу A_1B_1 , и луч AB принадлежит лучу A_2B_2 ;
- луч A_1B_1 принадлежит лучу AB , и луч A_2B_2 принадлежит лучу AB .

При первой комбинации луч A_2B_2 принадлежит лучу A_1B_1 и потому сонаправлен с ним. При второй комбинации луч A_1B_1 принадлежит лучу A_2B_2 и потому также сонаправлен с ним. При третьей комбинации

лучи A_1B_1 и A_2B_2 имеют одно и то же направление в силу теоремы 6, в четвертом случае — в силу теоремы 7.

Теорема 9. Два луча на прямой L_{II} , противонаправленные с третьим, сонаправлены между собой.

Доказательство. В силу теоремы 3 эти два луча сонаправлены продолжению третьего луча, а поэтому (теорема 8) сонаправлены между собой.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 10. Два луча, из которых один сонаправлен третьему, а другой ему противонаправлен, противонаправлены друг с другом.

3. Две стороны прямой.

Теорема 11. Все лучи на прямой L_{II} однозначно распадаются на две категории так, что два луча одной и той же категории сонаправлены между собой (обращены в одну и ту же сторону), а два луча различных категорий противонаправлены (обращены в разные стороны).

Доказательство. Возьмем произвольно два луча, обращенных на L_{II} в противоположные стороны; обозначим их через p и q . Отнесем к первой категории луч p и все лучи, обращенные с ним в одну сторону, ко второй категории — луч q и все лучи, обращенные в ту же сторону, что и q . Если луч p' отнесен к первой категории, т. е. сонаправлен с p , то он в силу теоремы 10 противонаправлен с q и, следовательно, не попадает во вторую категорию. Обратно, луч p' , не попавший во вторую категорию, т. е. противонаправленный лучу q , согласно теореме 9 обращен с p в одну и ту же сторону и, следовательно, попадает в первую категорию. Точно так же всякий луч, отнесенный ко второй категории, не попадает в первую, и обратно, всякий луч, не попавший в первую категорию, попадает во вторую. В силу последних теорем предыдущей рубрики два луча одной категории обращены в одну и ту же сторону, а два луча, из которых один принадлежит одной, другой — второй категории, обращены в противоположные стороны.

Такое разбиение может быть произведено только одним способом; в самом деле, лучи p и q , из которых мы исходили при сделанном разбиении, необходимо должны попасть в различные категории при всяком разбиении; всякий луч p' , сонаправленный с p , должен попасть в ту же категорию, что и p , луч же q' , сонаправленный с q , должен попасть с лучом q в одну и ту же категорию.

Установленному предложению часто дают такое выражение:

Прямая L_{II} имеет две стороны обращения, которые определяются любыми двумя противонаправленными ее лучами.

В связи с этим сторону обращения можно присвоить и каждому отрезку. Именно, каждый отрезок AB , в котором A есть «начальная», B — «конечная» точки, считается обращенным в ту же сторону, что и луч AB . Присваивая таким образом отрезку AB сторону обращения от A к B , будем его обозначать через $\overline{AB}$ и называть ориентированным отрезком прямой L_{II} . Два ориентированных отрезка $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A_2B_2}$ считаются обращенными в одну сторону, если в одну сторону обращены лучи A_1B_1 и A_2B_2 ; они считаются обращенными

в противоположные стороны, если в противоположные стороны обращены лучи A_1B_1 и A_2B_2 . Отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ всегда обращены в противоположные стороны (теорема 2). Совершенно ясно, что все ориентированные отрезки прямой L_{II} также могут быть разбиты на две категории таким образом, что отрезки одной категории обращены в одну сторону, отрезки различных категорий обращены в различные стороны.

Прямую L_{II} называют ориентированной, если ей присвоена определенная сторона обращения, т. е. если в пределах некоторого рассуждения на ней рассматриваются только лучи, обращенные в одну сторону (в которую прямая ориентирована), и отрезки, обращенные в ту же сторону.

4. Ориентированная прямая как упорядоченное множество ее точек. Условимся теперь говорить, что на ориентированной прямой L_{II} точка A предшествует точке B , а точка B следует за точкой A , если отрезок AB обращен в ту же сторону, в которую обращена прямая (в которую обращены все лучи, определяющие сторону обращения прямой).

Теорема 12. Если точка A предшествует точке B , а точка B предшествует точке C , то точка A предшествует точке C .

Доказательство. Если точка A предшествует точке B , то это означает, что ориентированная прямая обращена в сторону луча AB . Если точка B предшествует точке C , то в ту же сторону обращен луч BC ; следовательно, лучи AB и BC обращены в одну сторону. Отсюда следует, что точки B и C расположены по одну сторону точки A . В самом деле, если бы точка A лежала между точками B и C , так что точки A и C были бы расположены по одну сторону точки B , то лучи BA и BC совпадали бы; луч же AB был бы обращен в противоположную, чем они, сторону; между тем из условия задания, как мы видели, вытекает, что лучи AB и BC обращены в одну сторону. Так как точки B и C расположены по одну сторону точки A , то лучи AB и AC обращены в одну и ту же сторону — сторону ориентации прямой, значит, точка A предшествует точке C .

Эту же теорему можно формулировать следующим образом.

Теорема 13. Если точка B следует за точкой A , а точка C следует за B , то точка C следует за точкой A .

Отсюда следует, что установленная таким образом последовательность точек удовлетворяет требованиям, при которых множество называется упорядоченным. Иначе говоря, установленным соглашением прямая L_{II} претворена в упорядоченное множество ее точек.

Строго говоря, этот результат вытекает уже из одних постулатов расположения. Если, однако, постулаты структуры не удовлетворены, то самое содержание этого утверждения может оказаться мало содержательным, иногда даже бессодержательным.

5. Претворение вершинных отрезков луча в величину. Под вершинными отрезками луча разумею отрезки, принадлежащие лучу и имеющие вершину луча начальной точкой. Будем говорить, что два вершинных отрезка AB и AC луча AM равны ($AB = AC$), если точка B совпадает с C . Если же точка B предшествует C на луче AM , то будем говорить, что вершинный отрезок AB меньше вершинного

отрезка AC ($AB < AC$); если же точка B следует за C на луче AM , то будем говорить, что вершинный отрезок AB больше вершинного отрезка AC ($AB > AC$).

Из этого определения в связи с теоремой 13 непосредственно вытекает, что все постулаты сравнения выполнены и совокупность вершинных отрезков луча (всегда, таким образом, сонаправленных) этим превращена в величину. Однако для сравнения отрезков, не выходящих из одной точки, постулаты расположения и структуры еще никаких критериев не дают; для этого нужны постулаты третьей группы, так называемые постулаты конгруэнтности.

§ 85. ПОСТУЛАТЫ КОНГРУЭНТНОСТИ

1. Постулаты конгруэнтности. Два сонаправленных отрезка прямой (два отрезка ориентированной прямой) могут находиться в соотношении, которое аксиоматически определяется постулатами, образующими третью группу, — постулатами конгруэнтности. Они распадутся на две подгруппы. Первую подгруппу составляют три постулата, которые по схеме С. О. Шатуновского (§ 81) характеризуют всякое равенство (соотношение α); как таковое рассматривается и конгруэнтность¹⁾.

III₁. Каждый отрезок конгруэнтен самому себе.

III₂. Если отрезок AB конгруэнтен отрезку A_1B_1 , то отрезок A_1B_1 конгруэнтен отрезку AB .

III₃. Если отрезок AB конгруэнтен отрезку A_1B_1 , а отрезок A_1B_1 конгруэнтен отрезку A_2B_2 , то отрезок AB конгруэнтен отрезку A_2B_2 .

Если отрезок AB конгруэнтен отрезку A_1B_1 , то мы будем писать:

$$AB \equiv A_1B_1.$$

Во вторую подгруппу входят четыре специфических постулата, относящихся к конгруэнтности отрезков.

III₄. Если отрезки OA и OB одного и того же луча конгруэнтны, то точки A и B совпадают.

III₅. Каковы бы ни были отрезок AB прямой L_{II} и точка O на ней, на луче OC , сонаправленном с AB , существует такая точка C , что $OC \equiv AB$.

III₆. Каковы бы ни были отрезок AB прямой (L_{II}) и точка O на ней, на луче OD , противоположном с AB , существует такая точка D , что $DO \equiv AB$.

III₇. Если точка B лежит между точками A и C , а точка B' лежит между A' и C' и если $A'B' \equiv AB$, $B'C' \equiv BC$, то $A'C' \equiv AC$ (аксиома Гильберта).

В силу постулата III₅ мы имеем возможность от любой точки в данном направлении отложить отрезок, конгруэнтный данному. Постулат III₆ дает возможность откладывать отрезок, конгруэнтный данному отрезку AB и имеющий конец в данной точке O .

Теорема 1. Точка C , определяемая постулатом III₅, единственная.

¹⁾ В дальнейшем изложении черту над направленными отрезками мы не пишем.

Допустим, что существует кроме точки C еще другая точка C' , такая, что

$$OC' \equiv AB.$$

Тогда в силу постулата Π_2 имеем $AB \equiv OC'$; следовательно, имеют место два соотношения:

$$OC \equiv AB, \quad AB \equiv OC';$$

применяя к ним постулат Π_3 , получим $OC \equiv OC'$. Наконец, используя постулат Π_4 , получим, что точка C совпадает с C' ; тем самым единственность точки C , определяемой постулатом Π_5 , доказана.

Единственность же точки D , определяемой постулатом Π_6 , мы здесь доказать не в состоянии. Это станет возможным лишь после введения постулата Архимеда.

2. Непротиворечивость постулатов конгруэнтности. В области R всех действительных чисел будем считать два отрезка (a, b) ($b > a$) и (a', b') ($b' > a'$) конгруэнтными, если $b' - a' = b - a$. При этом условии постулаты конгруэнтности в области R явно удовлетворены.

3. Независимость постулатов конгруэнтности. Первые три аксиомы предполагаются всякий раз, когда мы устанавливаем соотношение, которое можно рассматривать как соотношение α в системе Шатуновского; они принадлежат общему учению о величине и стоят как бы вне геометрии, так сказать, над геометрией. Мы покажем, что специфические аксиомы $\Pi_4 - \Pi_7$ не зависят ни друг от друга, ни от постулатов $\Pi_1 - \Pi_3$.

Чтобы показать независимость постулата Π_4 , примем, что множество L совпадает с числовой прямой, но что два отрезка AB и A_1B_1 (определяемые числами (a, b) ($a < b$) и (a_1, b_1) ($a_1 < b_1$)) конгруэнтны, каковы бы ни были точки A, B и A_1, B_1 ; иными словами, мы будем считать всякие два сонаправленных отрезка конгруэнтными. Совершенно ясно, что постулаты $\Pi_1 - \Pi_3$, а также Π_5, Π_6, Π_7 выполнены, а постулат Π_4 в этом множестве не выполняется; он от остальных не зависит.

Чтобы обнаружить независимость постулата Π_5 , положим, что наше множество состоит из всех чисел, меньших какого-либо фиксированного числа. Конгруэнтными будем считать два отрезка (a, b) ($b > a$) и (a_1, b_1) ($b_1 > a_1$), если $b - a = b_1 - a_1$ (если длины их равны в обычном значении этого слова). Нетрудно себе уяснить, что все постулаты выполняются, кроме постулата Π_5 .

Независимость постулата Π_6 от остальных постулатов доказывается совершенно аналогично.

Наконец, чтобы обнаружить независимость постулата Π_7 , обратимся вновь к множеству всех действительных чисел R и будем считать два отрезка (a, b) ($b > a$) и (a_1, b_1) ($b_1 > a_1$) конгруэнтными, если

$$b_1 - a_1 = (b - a)e^{a_1 - a}.$$

В этом случае постулаты $\Pi_1 - \Pi_3$ выполнены. В самом деле, два совпадающих отрезка при этом условии явно конгруэнтны, т. е. постулат Π_1 выполнен. Постулат Π_2 также выполнен, так как равенство $b_1 - a_1 = (b - a)e^{a_1 - a}$ влечет за собой $b - a = (b_1 - a_1)e^{a - a_1}$. Наконец, если $b_1 - a_1 = (b - a)e^{a_1 - a}$, $b_2 - a_2 = (b_1 - a_1)e^{a_2 - a_1}$, то $b_2 - a_2 = (b - a)e^{a_2 - a}$, т. е.

постулат III_3 также выполнен. Далее, если $(a, b_1) \equiv (a, b)$, т. е. если оба отрезка выходят из общей точки a , то и обыкновенные расстояния (a, b_1) и (a, b) равны: $b_1 - a = b - a$, $b_1 = b$, т. е. точка b_1 совпадает с b , постулат III_4 выполнен. Каковы бы ни были точки (числа) a, b, a_1 ($b > a$), всегда существует число b_1 , для которого $b_1 - a_1 = (b - a)e^{a_1 - a}$, причем $b_1 > a_1$. Постулат III_5 также выполнен. Но выполнен также и постулат III_6 . Чтобы это обнаружить, нужно показать, что уравнению

$$b_1 - a_1 = (b - a)e^{a_1 - a} \quad (1)$$

можно удовлетворить надлежащим выбором a_1 , каковы бы ни были числа a, b, b_1 . Уравнение (1) можно записать в виде:

$$b_1 - a + x = (b - a)e^{-x}$$

или

$$(b_1 - a + x)e^x = b - a,$$

где $x = a - a_1$, причем, так как $b_1 > a_1$, то $x > a - b_1$ и, следовательно, $(b_1 - a + x) > 0$. Функция $(b_1 - a + x)e^x$ при возрастании x от $a - b_1$ до бесконечности монотонно возрастает от 0 до ∞ ; поэтому существует такое значение $x = c$, при котором уравнение (1) удовлетворено. Тогда значение $a_1 = a - c$ удовлетворяет требованию. Обращаясь, наконец, к постулату III_7 , положим, что отрезок (a, b) конгруэнтен отрезку (a_1, b_1) и отрезок (b, c) ($a < b < c$) конгруэнтен отрезку (b_1, c_1) ($a_1 < b_1 < c_1$); это значит $b_1 - a_1 = (b - a)e^{a_1 - a}$, $c_1 - b_1 = (c - b)e^{b_1 - b}$.

Чтобы постулат III_7 был выполнен, из этих двух соотношений должно всегда вытекать $c_1 - a_1 = (c - a)e^{a_1 - a}$, а мы имеем:

$$c_1 - a_1 = (c - b)e^{b_1 - b} + (b - a)e^{a_1 - a} = [(c - b)e^{(b - a)(e^{a_1 - a} - 1)} + (b - a)]e^{a_1 - a}.$$

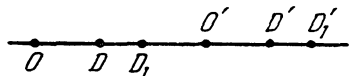
Выражение в квадратной скобке может быть равно $(c - a)$ лишь в случае $a_1 = a$ и только в этом случае ($a \neq b$). В общем же случае это не имеет места, т. е. постулат III_7 не представляет собой следствия постулатов $\text{III}_1 - \text{III}_6$.

Множество (прямую), на котором осуществляются все постулаты I, II, III, будем обозначать через L_{III} .

4. Ближайшие следствия постулатов конгруэнтности. Постулатам $\text{III}_4, \text{III}_5$ иногда дают такое выражение: от любой точки O в сторону ориентации прямой можно отложить любой отрезок AB той же ориентации, говорят также построить отрезок $OC \equiv AB$, причем конечная точка C этого отрезка однозначно определена (см. теорему 1). Далее, если A, O, B суть точки, расположенные последовательно в сторону ориентации прямой, то существуют такие точки A_1 и B_1 в расположении $A_1 O_1 B_1$, что $A_1 O_1 \equiv AO$ и $O_1 B_1 \equiv OB$. Часто это выражают так: множество L_{III} имеет одинаковую конструкцию в окрестности любой своей точки. В прежнее время (главным образом в средние века) этому давали такое выражение: пространство однородно; этому термину сообщено, таким образом, в отношении прямой точное содержание.

Мы можем теперь всю совокупность сонаправленных отрезков (обращенных в сторону ориентации прямой) претворить в величину. С этой целью выберем на прямой некоторую «начальную» точку O ; если AB и $A_1 B_1$ — два отрезка, обращенных в сторону ориентации прямой (мы всегда это подразумеваем и не

будем в дальнейшем постоянно повторять), то им однозначно отвечают две такие точки D и D_1 , что $OD \equiv AB$, $OD_1 \equiv A_1B_1$. Если точки D и D_1 совпадут, то отрезки AB и A_1B_1 , очевидно, конгруэнтны; если точка D окажется лежащей между точками O и D_1 , то мы будем говорить, что отрезок AB меньше отрезка A_1B_1 , а отрезок A_1B_1 больше отрезка AB . Покажем прежде всего, что это определение устанавливает критерий, не зависящий от выбора точки O . В самом деле, положим, что, откладывая отрезки AB и A_1B_1 от точки O , мы приходим к точкам D и D_1 , так что $OD \equiv AB$ и $OD_1 \equiv A_1B_1$, и что D лежит между O и D_1 , т. е. согласно установленному определению AB меньше A_1B_1 или символически $AB < A_1B_1$.



Черт. 112.

Пусть O' будет произвольная точка нашей прямой (черт. 112). От точки O' (в сторону ориентации прямой) отложим отрезок $O'D' \equiv OD$, а затем от точки D' отложим отрезок $D'D'' \equiv DD_1$. Согласно постулату III_7 , отрезок $O'D'$ конгруэнтен отрезку OD_1 и в силу III_3 $O'D' \equiv A_1B_1$ и $O'D' \equiv AB$. Так как при этом точка D' лежит между O' и D'' , то, откладывая отрезки AB и A_1B_1 от точки O' , мы и теперь приходим к тому, что $AB < A_1B_1$.

Все постулаты сравнения явно удовлетворены, поскольку они удовлетворены по отношению к вершинным отрезкам луча (рубр. 5 § 84). Мы установили, таким образом, критерий сравнения, при помощи которого все отрезки ориентированной прямой (как уже сказано, отрезки обращены в ту же сторону, что и прямая) претворяются в величину.

К этому необходимо сделать одно существенное замечание. Если точка D лежит между O и D_1 , то отрезок OD_1 больше отрезка OD . Однако установленные критерии сравнения не дают возможности утверждать, что отрезок $OD_1 > DD_1$. Для того чтобы эти отрезки сравнить, чтобы решить, который из них больше, нужно отложить отрезок DD_1 от точки O ; и мы на основании принятых нами постулатов не имеем возможности решить, куда при этом упадет точка D_1 : упадет ли она между O и прежней точкой D_1 , в точку D_1 или за нее. Более того, если отрезок A_1B_1 находится внутри отрезка AB , то мы на основе наших критериев сравнения не можем решить, будет ли отрезок A_1B_1 меньше отрезка AB или нет.

5. Сложение отрезков. Положим, что на ориентированной прямой L_{III} точки A, B, C расположены последовательно; мы разумеем при этом не только, что точка B лежит между A и C , но и что точка B следует за точкой A , а C следует за B при принятой ориентации прямой; при этих условиях будем говорить, что отрезок AC представляет собой сумму отрезков AB и BC :

$$AB + BC = AC.$$

Это определение легко распространяется на любые два отрезка AB и CD ориентированной прямой. От какой-либо точки O ориентированной прямой отложим отрезок $OM \equiv AB$, а затем отложим от точки M отрезок $MN \equiv CD$. Отрезок ON , представляющий собой сумму отрезков OM и MN , будем также называть суммой отрезков AB и CD :

$$ON = AB + CD.$$

Из постулата III₇ явно следует, что определенная таким образом сумма отрезков AB и CD не зависит от выбора точки O . Этим мы хотим сказать, что если от какой-либо другой точки O' отложим отрезок $O'M' \equiv AB$ и $M'N' \equiv CD$, то $O'N' \equiv ON$; иными словами, два отрезка, которые по предыдущему определению могут быть рассматриваемы каждый как сумма отрезков AB и CD , конгруэнтны между собой.

Сумма трех отрезков определяется так:

$$AB + BC + CD = (AB + BC) + CD.$$

Аналогично в порядке индукции определяется сумма любого конечного числа отрезков. Вместе с тем складываемые отрезки мы всегда можем считать сведенными в последовательный ряд так, что конец каждого отрезка совпадает с началом предыдущего.

Теорема 2. Сумма отрезков обладает ассоциативностью, т. е.

$$(AB + BC) + CD = AB + (BC + CD).$$

В самом деле, если три складываемых отрезка сведены в последовательный ряд, то $AB + BC = AC$, $AC + CD = AD$, $(AB + BC) + CD = AD$. В силу последовательного расположения точек $AB + BD = AD$, $BD = BC + CD$, $AB + (BC + CD) = AD$. Поэтому

$$(AB + BC) + CD = AB + (BC + CD).$$

Теорема распространяется, конечно, на какое угодно конечное число слагаемых отрезков.

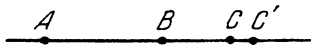
Теорема 3. Сумма двух отрезков больше первого из слагаемых отрезков:

$$AB + BC > AB.$$

Это вытекает непосредственно из того, что точка B лежит между A и C в силу определения суммы отрезков.

Теорема 4. Сумма двух отрезков возрастает с возрастанием второго слагаемого.

Рассмотрим две суммы $AB + BC$ и $AB + BC'$ (черт. 113), причем $BC' > BC$. Если складываемые отрезки сведены в общий последовательный ряд, то условие $BC' > BC$ означает, что точка C лежит между B и C' . Она расположена также между A и C' , значит, $AB + BC' > AB + BC$.



Черт. 113.

Вопрос о том, обладает ли сумма двух отрезков также коммутативностью, на основе принятых нами аксиом в утвердительном смысле не решается. Точно так же нельзя утверждать, что сумма двух слагаемых отрезков на прямой L_{III} больше второго из слагаемых.

Теорема 5. Сумма нескольких отрезков не изменится, если одно или несколько слагаемых отрезков заменим конгруэнтными им отрезками.

Доказательство предоставляем читателю.

6. Отрезки, кратные данному отрезку. Сумма m равных отрезков, скажем, AB , обозначается через mAB . Если для краткости будем обозначать данный отрезок через p , то

$$mp + np = (m + n)p; \quad m(np) = mnp, \quad (m + n)p > mp.$$

Два отрезка называются соизмеримыми, если существует отрезок, которому оба они кратны.

Теорема 6. Сумма двух соизмеримых отрезков на ориентированной прямой L_{III} коммутативна.

В самом деле, если $AB = mp$, $CD = np$, то $AB + CD = (m + n)p$, $CD + AB = (n + m)p$, т. е. $AB + CD = CD + AB$.

Распространить это предложение в L_{III} на несоизмеримые отрезки не удастся; это требует дальнейшего развития аксиоматики.

7. Разность двух отрезков. Положим, что на ориентированной прямой даны два отрезка AB и CD , причем $AB > CD$. В таком случае существует отрезок x , удовлетворяющий равенству $AB = CD + x$. В самом деле, отложив на луче AB отрезок $AE \equiv CD$, приходим к точке E , которая лежит между A и B ($CD < AB$); поэтому $AB = CD + EB$, отрезок EB удовлетворяет нашему требованию. Всякий другой отрезок, удовлетворяющий этому требованию, конгруэентен EB , ибо с возрастанием второго слагаемого сумма возрастает, а с его убыванием уменьшается. Этот отрезок x называют разностью отрезков AB и CD и обозначают через $AB - CD$.

§ 86. ПОСТУЛАТ АРХИМЕДА

1. Постулат Архимеда. В VII книге «Начал» Евклида ^[95] установлен алгоритм нахождения общей меры двух отрезков. Этот алгоритм получил применение также и в теории чисел (что по существу предусмотрено и Евклидом), и в алгебре при разыскании общего наибольшего делителя двух целых чисел, целых алгебраических функций одной независимой переменной, целых алгебраических чисел; он, несомненно, принадлежит к числу важнейших математических процессов и получил наименование алгоритма Евклида. Вряд ли это наименование правильно: не может подлежать сомнению, что им владели уже до Евклида, им во всяком случае пользовался уже Евдокс.

Как известно, в применении к отрезкам (мы здесь, как и в предыдущем параграфе, имеем в виду отрезки ориентированной прямой) алгоритм Евклида заключается в том, что меньший отрезок откладывается на большем последовательно от его начала «столько раз, сколько уложится»; иначе говоря, при данных двух отрезках, которые для краткости будем обозначать через p и q , составляем кратное одного, скажем, отрезка q , до тех пор, пока не превзойдем второго. Если m есть целое число, такое, что

$$mq \leq p < (m + 1)q, \quad (1)$$

то говорят, что отрезок q содержится в отрезке p m раз. (Если $q > p$, то говорят, что отрезок q содержится в p нуль раз.) Неравенство (1) можно заменить соотношением

$$p = mq + r, \quad 0 \leq r < q. \quad (2)$$

Естественно возникает вопрос, осуществим ли этот процесс, т. е. всегда ли возможно меньший отрезок повторить столько раз, чтобы превысить заданный больший отрезок. Евклид это принимает молчаливо, впрочем, не без оговорок: именно, в определении 4 книги V говорится ([95], стр. 142):

«4. Отношение друг к другу имеют только такие величины, одна из которых, будучи повторена достаточное число раз, может превзойти другую.»

Как указывает Штольц [⁹⁶], [⁹⁷], есть основание думать, что еще до Евклида Евдокс Кидский, а может быть и другие высказывали утверждение, явно подтверждающее возможность повторить один отрезок столько раз, чтобы превзойти другой¹⁾. Во всяком случае Архимед высказывает это положение в различных сочинениях и особенно четко в виде 5-й аксиомы (см. ч. I, § 11, рубр. 5) формулирует его в сочинении «О сфере и цилиндре» [⁹⁸]; Архимед дает этому положению явное выражение в виде особой аксиомы, текст которой мы уже привели выше и здесь повторяем (она имеет, впрочем, более общее содержание):

«Из двух неравных линий, двух неравных поверхностей или двух неравных тел большая может оказаться меньше той величины, которую мы получим, если повторим меньшую надлежащее число раз.»

Применяя это предложение к геометрии ориентированной прямой, мы формулируем его в качестве первого постулата следующей IV группы.

IV₁. На ориентированной прямой L_{III} меньший из двух заданных отрезков, будучи повторен достаточное число раз, превзойдет больший.

Иными словами, при $p < q$ всегда существует одно и только одно целое число m , при котором выполняются соотношения (1) или эквивалентные им соотношения (2). Этот постулат, или аксиому, Штольц [⁹⁶], [⁹⁷] назвал аксиомой Архимеда; это наименование за ним утвердилось. Мы будем именовать предложение IV₁ постулатом Архимеда.

2. Независимость постулата Архимеда от постулатов I—III. Работа Веронезе. Чтобы показать, что постулат Архимеда не зависит от постулатов I—III, надо построить геометрическую систему, которая удовлетворяет требованиям постулатов I—III и не удовлетворяет постулату Архимеда. Таковую геометрию впервые построил Дж. Веронезе в опубликованном в 1891 г. сочинении «Основания геометрии многих измерений со многими единицами различного вида в элементарном изложении» [⁸²]. В этом обширном сочинении, содержащем до 700 страниц большого формата, автор старается охватить широкий круг вопросов, которым обнимает все стороны учения об основаниях математики. В своем предисловии автор утверждает, что он, строго говоря, не предполагает у читателя математических знаний, что ему нужен только читатель, умеющий математически мыслить. Такого читателя Веронезе желает ввести в глубоко отвлеченную область формальной геометрии, имеющей своим объектом пространство любого числа измерений. Чтобы остаться верным этой задаче, чтобы тут же дать читателю тот материал, который ему нужен из арифметики и даже из логики, Веронезе начинает издалека. Именно, он начинает с основных вопросов логики. Он говорит об определении терминов, об ассоциации, о доказательстве; он рассматривает далее арифметику как обыкновенную, так и своеобразную т р а н с ф и н и т н у ю, о которой речь будет ниже.

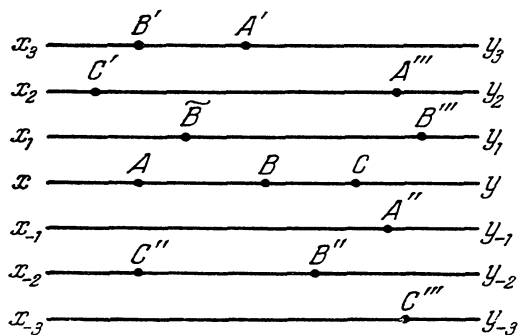
¹⁾ Эти сообщения Штольца не кажутся мне вполне убедительными. Архимед действительно упоминает о том же получении в письме к Досифею, предпосланном сочинению «О квадратуре параболы». Но он говорит только, что этим «вспомогательным предложением» уже пользовались до него другие геометры. Им явно пользовался уже Евклид; но из этого не следует, что кто-либо выделял его в особую аксиому.

На этой базе Веронезе строит свою геометрию. Справиться с такой широкой задачей, конечно, очень трудно. Несмотря на то, что автор имеет целью выяснить эти трудные вопросы, он часто ведет рассуждения в такой мере неясно, что в них терялись люди, умеющие справляться с глубоко отвлеченными вопросами. К тому же обширная и своеобразная терминология чрезвычайно затрудняет чтение этого сочинения. Число лиц, вполне уяснивших себе систему Веронезе во всем ее развитии, повидимому, весьма ограничено¹⁾.

Книга Веронезе была встречена весьма несочувственно; даже Кантор, творец трансфинитной арифметики, не признает системы Веронезе правильной (G. Cantor [99]). При всем том в настоящее время Веронезе можно считать общепризнанным родоначальником учения о трансфинитной геометрии. Большую роль сыграл мемуар молодого тогда, ныне покойного, талантливого итальянского геометра Т. Леви-Чивита (T. Lewi-Civita [100]), в котором автор дает систему своеобразных трансфинитных чисел, отличающуюся четкостью и простотой. Эта система дает также полную возможность построить соответствующее аналитическое пространство. Веронезе считает, что это построение представляет собой аналитическое воспроизведение системы, построенной им геометрически. Не входя в этот спор, мы изложим здесь простейший частный случай замысла Веронезе, которым мы ниже воспользуемся для решения вопроса о независимости постулатов IV группы.

3. Простейший случай системы Веронезе. При изложении этого материала в интересах выяснения замысла Веронезе мы позволим себе, быть может, некоторое злоупотребление наглядными представлениями, как это

делает и Веронезе во введении к своей книге. Ниже мы дадим этому замыслу простое аналитическое выражение. На евклидовой плоскости представим себе ряд параллельных прямых, отстоящих на одно и то же расстояние одна от другой (черт. 114). Всю совокупность точек, лежащих на этих прямых, представим в упорядоченное множество следующим образом. Из двух точек, лежащих на одной и той же параллели, будем считать последующей ту, которая



Черт. 114.

располагается в сторону обращения прямой (все параллели считаем ориентированными, обращенными в одну сторону, скажем, слева направо). Из двух точек, лежащих на разных параллелях, будем считать последующей ту, которая лежит на более высокой параллели. При этих условиях из трех точек A, B, C , лежащих на одной и той же параллели, точка B «лежит между A и C », если она лежит между ними в обычном значении слова; из трех же точек A', B', C' , из которых две, скажем, A' и B' , лежат на более высокой параллели, чем C' , «точка B' лежит между A' и C' », если она предшествует A' на своей параллели. Из трех точек A'' ,

¹⁾ В сочинении [86], т. II идеи Веронезе изложены более или менее обстоятельно (стр. 469—475). Но некоторые важные моменты остаются невыясненными.

B'' , C'' , из которых две последние лежат на более низкой параллели, чем A'' , « B'' лежит между A'' и C'' », если она на своей параллели следует за точкой C'' . Если же три точки A''' , B''' , C''' лежат на различных параллелях, то « B''' лежит между A''' и C''' », если параллель, на которой она расположена, лежит между параллелями, на которых лежат точки A''' и C''' . Совершенно ясно, что все постулаты расположения и структуры (группы I и II) при этих условиях выполнены. Сделав некоторое дальнейшее усилие над интуицией, можно себе представить, что все параллели следуют одна за другой по бесконечно удаленной прямой, непосредственно примыкая одна к другой; установленная последовательность теперь как бы соответствует натуральному расположению точек. Но мы можем себе теперь представить, что эта прямая, твердо скрепленная в своих частях, движется сама по себе в одну и другую стороны. Мы будем считать конгруэнтными два отрезка, которые при таком движении могут быть приведены в совмещение. Все постулаты конгруэнтности будут при этом удовлетворены. Вместе с тем, однако, ясно, что, повторив отрезок AB , скажем, на прямой xy , сколько угодно раз, мы не выйдем за пределы этой прямой, т. е. не превзойдем отрезка AB , оканчивающегося на следующей параллели. Постулат Архимеда в этом множестве L_{II} не удовлетворен и поэтому представляет собой положение, не зависящее от предыдущих постулатов. Если неубедительны соображения, основанные на их наглядности, то тем менее можно полагаться на рассуждения, требующие насилия над интуицией. Но приведенные соображения все же дают представление об идее Веронезе в том виде, в каком она первоначально зародилась. Неотчетливость, туманность этих образов были причиной того, что сочинение Веронезе, как уже указано выше, не получило ни распространения, ни признания. И все же Веронезе принадлежит заслуга выдвижения идей, получивших позже научное развитие и признание.

4. Претворение комплексных чисел в величину. Уже Томе (J. Thomae [101]) в 1870 г. показал, как можно претворить совокупность комплексных (даже гиперкомплексных) чисел, выражаясь современной терминологией, в упорядоченное множество, или по принятой нами терминологии в величину по схеме С. О. Шатуновского. Это построение заключается в следующем. Будем считать комплексное число $\omega = a + bi$ равным числу $\omega' = a' + b'i$, как обычно, в том случае, когда $a = a'$ и $b = b'$, т. е. когда обе разности $b - b'$ и $a - a'$ равны нулю. В дополнение к этому будем считать $\omega > \omega'$, если первая из разностей $b - b'$, $a - a'$, которая не обращается в нуль, имеет положительное значение; будем считать $\omega < \omega'$, если эта разность имеет отрицательное значение. Очень легко убедиться, что эти критерии сравнения удовлетворяют всем постулатам сравнения. Принимая их, мы претворяем множество комплексных чисел в скалярную величину и тем самым в упорядоченное множество.

Теперь будем рассматривать множество всех комплексных чисел как пространство и соответственно этому будем называть каждое число ω точкой этого пространства. Ясно, что точку ω' будем считать лежащей между точками ω и ω'' , если

$$\omega < \omega' < \omega'' \quad \text{или} \quad \omega > \omega' > \omega''.$$

Все постулаты как расположения, так и структуры явно удовлетворены. Получающееся таким образом множество L_{II} будем считать обращенным в сторону возрастающих ω . Каждые две точки α и β этого множества

определяют отрезок, содержащий кроме α и β все точки, лежащие между ними. Будем теперь называть два сонаправленных отрезка $[\alpha, \beta]$ и $[\alpha', \beta']$ ($\alpha < \beta$ и $\alpha' < \beta'$) конгруэнтными, если разности $\beta - \alpha$ и $\beta' - \alpha'$ равны. Будем считать отрезок $[\alpha', \beta']$ больше отрезка $[\alpha, \beta]$, если $\beta' - \alpha' > \beta - \alpha$ в определенном выше смысле. Если имеем два сонаправленных отрезка $[\alpha, \beta]$ и $[\beta, \gamma]$, таких, что конец одного служит началом другого, то под суммой этих двух отрезков будем понимать, как обычно, отрезок

$$[\alpha, \gamma] = [\alpha, \beta] + [\beta, \gamma],$$

имеющий началом начало первого из складываемых отрезков, а концом — конец второго. Как же сложить два сонаправленных отрезка $[\alpha, \beta]$ и $[\alpha', \beta']$, если $\alpha' \neq \beta$?

Сонаправленные отрезки $[\alpha', \beta']$ и $[\alpha' + \gamma, \beta' + \gamma]$, где γ — произвольное комплексное число, конгруэнтны, так как

$$(\beta' + \gamma) - (\alpha' + \gamma) = \beta' - \alpha'$$

(см. определение конгруэнтности). Поэтому

$$[\alpha', \beta'] \equiv [\alpha' + (\beta - \alpha'), \beta' + (\beta - \alpha')] (-[\beta, (\beta' - \alpha') + \beta]).$$

Следовательно, чтобы сложить два отрезка $[\alpha, \beta]$, $[\alpha', \beta']$, где $\alpha' \neq \beta$, мы заменяем один из них $[\alpha', \beta']$ конгруэнтным ему отрезком $[\beta, (\beta' - \alpha') + \beta]$, начало которого совпадает с концом первого отрезка:

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta] + [\alpha', \beta'] &= [\alpha, \beta] + [\beta, (\beta' - \alpha') + \beta] = \\ &= [\alpha, (\beta' - \alpha') + \beta] = [\alpha + \alpha', \beta + \beta']. \end{aligned}$$

Последняя запись доказывает также, что в этом случае сложение отрезков обладает переместительным законом. Полученный результат можно естественным образом распространить на сумму любого числа сонаправленных отрезков.

Легко убедиться, что при этих условиях все постулаты конгруэнтности также удовлетворены.

Повторяя m раз отрезок $[\alpha, \beta]$ (умножая его на целое число m), получим отрезок $[m\alpha, m\beta]$. Теперь ясно, что из двух отрезков $[0, 1]$ и $[0, i]$ второй больше первого. Повторяя первый отрезок какое угодно целое число m раз, мы получим отрезок $[0, m]$, который также будет меньше отрезка $[0, i]$; превзойти его кратным повторением первого отрезка невозможно. Постулат Архимеда в этом пространстве несправедлив. Отсюда следует, что постулат Архимеда не является следствием постулатов расположения, структуры и конгруэнтности. Этот вывод, проистекающий по схеме Томе, был сделан Штольцем в упомянутом выше его мемуаре [96].

Прямую L_{III} , в которой постулат Архимеда имеет место, называют архимедовой, а также линейным архимедовым пространством. Архимедову прямую будем обозначать через L_a . Соответствующую геометрию называют архимедовой. Напротив, прямую (пространство), в которой постулат Архимеда не удовлетворен, называют неархимедовой (неархимедово пространство).

Если в неархимедовом пространстве можно выделить две категории, отрезков такого рода, что, повторяя любой отрезок первой категории, мы не можем превзойти отрезок второй категории, то вторая категория называется трансфинитной (как бы лежащей за бесконечностью) по отношению к первой категории.

5. Аналитическое выражение линейного неархимедова пространства Веронезе. Некоторая модификация замысла, изложенного в рубр. 4, приводит к аналитическому выражению того простейшего множества Веронезе, которое описано в рубр. 3. Именно, рассмотрим множество комплексных чисел вида $\omega = a + ni$, где n — целое число (положительное или отрицательное). Из двух чисел $\omega = a + ni$ и $\omega' = a' + n'i$ будем считать второе большим ($\omega' > \omega$), чем первое, или следующим за первым, если $n' > n$, а при $n' = n$, если $a' > a$. Если изобразить через $a + ni$ точку евклидовой плоскости с ортогональными декартовыми координатами $x = a$, $y = n$, то получим все точки конфигурации Веронезе, изображенной на черт. 114. Если в случае $\omega' > \omega$ будем считать, что точка ω' следует за ω , то мы получим именно то расположение, которое устанавливает Веронезе. Равенство (конгруэнтность) отрезков определим так, как это в более общем виде сделано в схеме Томе. Мы получим неархимедово пространство, теперь построенное аналитически совершенно строго. Нам придется им ниже пользоваться; мы будем его называть линейным неархимедовым востранством Веронезе.

6. Трансфинитное (неархимедово) пространство Гильберта. Таким образом к тому времени, когда Гильберт писал свои «Основания», независимость постулата Архимеда была уже многообразно выяснена. При всем том Гильберт построил для этой цели своеобразную систему трансфинитных чисел и связанную с ней неархимедову геометрию. Она представляет интерес как по своеобразию своего замысла, так и по тому значению, которое ей придают в литературе; мы изложим и это построение.

Над областью всех действительных чисел построим все рациональные функции независимой переменной t , т. е. построим все рациональные функции от t с действительными коэффициентами. К рациональным операциям, при помощи которых эти функции построены, присоединим еще операцию $\sqrt{1 + \omega^2}$. Это означает следующее. Присоединив к совокупности всех действительных чисел всевозможные рациональные функции $\omega(t)$, о которых была речь выше, введем еще все функции вида $\sqrt{1 + \omega^2(t)}$ и все те функции, которые из них и рациональных функций могут быть построены при помощи рациональных действий, и эти функции введем в нашу расширенную область. Эту операцию приобщения будем продолжать далее, т. е. к области построенных функций будем всякий раз приобщать всевозможные функции, полученные из тех, которыми мы уже располагаем, рациональными действиями и операцией $\sqrt{1 + \omega^2}$. Эти функции будем называть функциями Гильберта и будем их обозначать через $H(t)$. Для действительных значений переменной t , каковы мы только и будем рассматривать, все эти функции имеют действительные значения. Совокупность всех гильбертовых функций, рассматриваемую как множество $\mathfrak{H}$, можно претворить в упорядоченное множество; это осуществляется следующим образом. Так как каждая функция $H(t)$ есть функция алгебраическая, то она может обращаться в нуль только конечное число раз. Поэтому каждая гильбертова функция, не обращающаяся в нуль тождественно, начиная с достаточно большого значения независимой переменной t , сохраняет знак. Пусть $H_1(t)$ и $H_2(t)$ будут две гильбертовы функции; таковую представляет и их разность $H_2(t) - H_1(t)$. Если эта разность тожде-

ственно обращается в нуль, то мы будем говорить, что функции $H_1(t)$ и $H_2(t)$ как элементы множества $\mathfrak{H}$ равны; если это не имеет места и разность $H_2(t) - H_1(t)$ при достаточно больших значениях t сохраняет положительное значение, то будем говорить, что $H_2(t) > H_1(t)$; если же эта разность сохраняет отрицательное значение, будем говорить, что $H_2(t) < H_1(t)$. Совершенно ясно, что эти критерии сравнения удовлетворяют постулатам сравнения и претворяют множество гильбертовых функций в скалярную величину или в упорядоченное множество. Гильберт называет эти функции, рассматриваемые как элементы упорядоченного множества, числами по аналогии с тем, что действительные числа или комплексные числа располагаются в упорядоченную последовательность; их называют с этой точки зрения гильбертовыми числами. После этого можно строить геометрию гильбертовой прямой совершенно аналогично тому, как мы строили геометрию аналитического множества (прямой) всех комплексных чисел. Так, мы будем считать множество обращенным в сторону возрастания $H(t)$ и отрезок $[H_1(t), H_2(t)]$ будем считать конгруэнтным отрезку $[H'_1(t), H'_2(t)]$, если $H'_2(t) - H'_1(t) = H_2(t) - H_1(t)$. Ясно, что все постулаты групп I — III удовлетворены. Вместе с тем, если сравним отрезки $[0, 1]$ и $[0, t]$, то первый меньше второго и остается меньше его, сколько бы n раз мы ни повторяли первый отрезок, ибо целое число n во множестве гильбертовых чисел всегда меньше, чем t . Самое расположение гильбертовых чисел можно представить себе так, что сначала идут действительные числа, а за ними в одну и другую стороны положительные и отрицательные трансфинитные числа (функции t).

Это неархимедово линейное множество (неархимедова прямая в геометрической терминологии) также обнаруживает, что постулат Архимеда не представляет собой следствия постулатов расположения, структуры и конгруэнтности. Заметим, что замысел Гильберта в некоторой модификации также встречался уже до него в работах П. Дю-Буа-Реймона (P. Du-Bois-Reymond [¹⁰²]) и др. Вряд ли полезно входить здесь в более детальное рассмотрение возникновения и исторического развития этих идей. Существо дела сводится к тому, что постулат Архимеда не представляет собой следствия предыдущих постулатов и должен быть введен как новое независимое допущение.

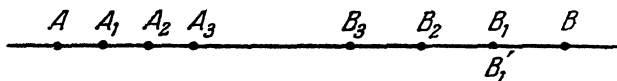
§ 87. МЕТРИКА АРХИМЕДОВОЙ ПРЯМОЙ

1. Основные теоремы. В рубр. 5 § 84 и рубр. 4 § 85 дано сравнение вершинных отрезков. Теперь благодаря присоединению постулата Архимеда средства, которыми мы располагаем, возросли. С их помощью можно доказать следующее предложение, которое ранее нам было недоступно.

Теорема 1. На ориентированной архимедовой прямой всякий отрезок больше любого отрезка, составляющего его часть.

Доказательство. Пусть внутри отрезка AB лежит сонаправленный с ним отрезок A_1B_1 (черт. 115); нужно доказать, что $AB > A_1B_1$. Доказательство теоремы проведем от противного; допустим сначала, что $AB \equiv A_1B_1$. От точки A_1 на ориентированной прямой отложим отрезок $A_1A_2 \equiv AA_1$, далее от точки A_2 отложим отрезок $A_2B_2 \equiv A_1B_1$, а от точки B_2 отложим отрезок $B_2B'_1 \equiv B_1B$. Тогда отрезок $A_1B'_1 = AA_1 + A_1B + B_1B$

согласно теореме 5 § 85 равен $AB (\equiv A_1B_1)$; точка B'_1 совпадает с B_1 (III₄) и точки A_1, A_2, B_2, B_1 расположены последовательно. Таким образом при сделанном предположении внутри отрезка A_1B_1 расположится равный ему отрезок A_2B_2 ; точка A_2 будет предшествовать B_1 , а $AA_2 = 2AA_1$. Это построение можно повторить неограниченное число раз, при этом всякий раз отрезок $AA_n = nAA_1$ не превосходит AB_1 , чего не может



Черт. 115.

быть на архимедовой прямой. Сделанное предположение поэтому неправильно, т. е. отрезок A_1B_1 , равный отрезку AB , не может помещаться внутри него.

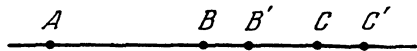
Допустим теперь, что отрезок AB меньше отрезка A_1B_1 , составляющего его часть. Если тогда от точки A_1 отложим отрезок $A_1B' \equiv AB$, то точка B' упадет внутрь отрезка A_1B_1 и отрезок AB окажется равным отрезку A_1B' , лежащему внутри его; мы возвращаемся к уже рассмотренному случаю, который ведет к противоречию. Итак,

$$AB > A_1B_1.$$

К этому сделаем два замечания. Во-первых, совершенно ясно, что то же рассуждение может быть проведено и в том случае, если точка B_1 совпадает с B . Во-вторых, полезно еще раз подчеркнуть, что доказательство существенно основывается на постулате Архимеда. На прямой L_{III} , на которой постулат Архимеда несправедлив, самая теорема не всегда справедлива.

Теорема 2. Сумма нескольких отрезков возрастает с возрастанием любого слагаемого.

Докажем теорему для случая двух отрезков. Мы уже видели выше (§ 85, теорема 4), что на всякой прямой L_{III} сумма $AB + BC$ возрастает с возрастанием второго слагаемого. Пусть отрезок AB заменен большим отрезком AB' , так что точка B лежит между A и B' (черт. 116).



Черт. 116.

Чтобы построить отрезок $AB' + BC$, мы должны от точки B' отложить отрезок $B'C' \equiv BC$. Если бы точка C' упала между B' и C или в точку C , то отрезок $B'C'$, как это следует из доказательства предыдущей теоремы, был бы меньше BC , между тем как он должен быть ему равен. Следовательно, точка C' упадет за точку C , т. е. $AC' > AC$. Распространение этой теоремы на любое число складываемых отрезков читателя не затруднит.

2. Структура архимедовой прямой. Структура ориентированной архимедовой прямой L_a может быть выяснена более детально, чем структура прямой L_{III} .

Теорема 3. На архимедовой прямой L_a , каков бы ни был отрезок $AB = \epsilon$ и каково бы ни было целое положительное число n , всегда можно найти такой отрезок δ , что $n\delta < \epsilon$.

Доказательство. Взяв отрезок $AB = \epsilon$, нанесем на нем n различных точек, которые перенумеруем последовательно. Тогда отрезок AP

будет представлять собой сумму $AA_1 + A_1A_2 + \dots + A_nB$. Если за δ примем наименьший из этих отрезков, то и $n\delta < \epsilon$.

В рубр. 5 § 85 было указано, что постулаты III_4 , III_5 приводят к некоторой однородности пространства. Нужно, однако, сказать, что эта однородность тоже односторонняя. В окрестности каждой точки с той стороны, в которую прямая обращена, структура та же, что и в окрестности любой другой точки с той же стороны. Чтобы однородность имела место и с другой стороны, нужно использовать постулат III_6 , который до сих пор не находил себе применения. Это обуславливается тем, что он нуждается в уточнении, которое может быть достигнуто только теперь.

Теорема 4. Если на ориентированной прямой L_a конгруэнтные отрезки BA и $B'A$ имеют общий конец A , то начальные точки B и B' также совпадают.

В самом деле, если бы точка B' лежала между B и A , то согласно теореме 1 отрезок BA был бы больше, чем $B'A$.

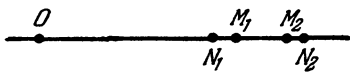
Постулаты III_5 и III_6 приводят теперь к тому, что к каждой точке можно, так сказать, приложить началом и концом любой отрезок, т. е., каков бы ни был отрезок p ориентированной прямой и какова бы ни была точка A на ней, существует одна и только одна такая точка B , следующая за A , что $AB \equiv p$, а также одна и только одна точка B' , предшествующая A , такая, что $B'A \equiv p$.

В этом смысле ориентированная прямая L_a действительно однородна: она имеет одинаковую структуру во всех своих точках. То обстоятельство, что на архимедовой прямой по одну и другую сторону любой точки расположены точки, образующие с первой отрезки, не только равные любому отрезку этой прямой, но и меньшие любой части каждого отрезка, выражают так: архимедова прямая L_a есть множество всюду плотное.

3. Коммутативность суммы отрезков.

Теорема 5. На архимедовой прямой L_a сумма отрезков коммутативна.

Доказательство. От точки O отложим отрезки $OM_1 \equiv AB + CD$ и $OM_2 \equiv CD + AB$ (черт. 117). Если допустим, что эти отрезки не равны



Черт. 117.

и первый меньше второго, то точка M_1 предшествует точке M_2 . Выберем отрезок δ так, чтобы $2\delta < M_1M_2$ (теорема 3). Так как прямая архимедова, то положим, что отрезок δ содержится в отрезке AB m_1 раз, а в отрезке CD содержится m_2 раз, так что

$$m_1\delta \leq AB < (m_1 + 1)\delta, \quad m_2\delta \leq CD < (m_2 + 1)\delta.$$

Так как

$$m_1\delta + m_2\delta = (m_1 + m_2)\delta = m_2\delta + m_1\delta,$$

то по теореме 2

$$(m_1 + m_2)\delta \leq AB + CD < (m_1 + m_2 + 2)\delta,$$

$$(m_1 + m_2)\delta \leq CD + AB < (m_1 + m_2 + 2)\delta.$$

Если поэтому от точки O отложим отрезки $ON_1 \equiv (m_1 + m_2)\delta$, $ON_2 \equiv (m_1 + m_2 + 2)\delta \equiv ON_1 + 2\delta$, то точка N_1 упадет в точку M_1 или до нее, точка N_2 упадет за M_2 , отрезок же N_1N_2 равен 2δ . В силу

теоремы 1 отсюда следует, что $N_1 N_2 > M_1 M_2$, что находится в противоречии с исходным положением $2\delta < M_1 M_2$. Теорема таким образом доказана. Распространение доказываемого утверждения на любое конечное число слагаемых отрезков не представляет трудности.

Из коммутативности суммы вытекает также, что уравнения

$$x \div p = q, \quad p \div x = q$$

при $q > p$ имеет общее решение $q - p$ и что тождество

$$n(q - p) = nq - np$$

справедливо для любого целого n .

4. Теоремы содержимости. В настоящей рубрике устанавливаются теоремы, подготавливающие учение об отношении отрезков на архимедовой прямой.

Теорема 6. Если на прямой L_a отрезки

$$r_1, r_2, r_3, \dots, r_m, \dots \quad (1)$$

таковы, что произведения их на неограниченно возрастающие натуральные числа $n_1, n_2, \dots, n_m, \dots$

$$n_1 r_1, n_2 r_2, n_3 r_3, \dots, n_m r_m, \dots \quad (2)$$

остаются меньше некоторого отрезка δ , то отрезки (1) неограниченно убывают, т. е. становятся меньше любого наперед заданного отрезка ϵ .

Предположим противное, т. е. что для любого ϵ будет $\epsilon \leq r_i$ для бесконечной последовательности значений $i = k_1, k_2, k_3, \dots$. Тогда $n_i \epsilon \leq n_i r_i < \delta$, что противоречит постулату Архимеда.

В некоторой связи с этим находится вопрос о том, всегда ли на архимедовой прямой существует отрезок ϵ , составляющий n -ю часть данного отрезка δ . Легко обнаружить, что это отнюдь не всегда имеет место. В самом деле, рассмотрим множество чисел вида $\alpha + \beta \sqrt{3}$; α, β — целые числа. Будем считать их расположенными в натуральном порядке; конгруэнтными будем считать отрезки, равные в арифметическом значении этого слова. В этом множестве удовлетворены все приведенные выше постулаты I, II, III, IV₁. Для примера проведем здесь проверку одного из постулатов, например II₂, предоставив проверку выполнения остальных постулатов читателю. Имеем два числа: $\alpha_1 + \beta_1 \sqrt{3} < \alpha_2 + \beta_2 \sqrt{3}$, тогда $\epsilon = (\alpha_2 - \alpha_1) + (\beta_2 - \beta_1) \sqrt{3} > 0$. Рассмотрим число $(\sqrt{3} - 1)$, оно имеет вид $\alpha + \beta \sqrt{3}$. Если выбрать n достаточно большим, то $\delta = (\sqrt{3} - 1)^n < \epsilon$ и имеет также вид $\alpha + \beta \sqrt{3}$. Следовательно, число $\alpha_1 + \beta_1 \sqrt{3} + \delta$ имеет вид $\alpha + \beta \sqrt{3}$ и расположено между двумя данными числами, т. е. постулат II₂ выполнен. Однако в рассматриваемом множестве отрезок $(0, \alpha + \beta \sqrt{3})$ может быть разделен на два равных отрезка только в том случае, если α и β делятся на 2. Покажем, однако, что на архимедовой прямой всегда можно найти отрезок, содержащий n раз в заданном отрезке p , каково бы ни было натуральное число n . Это утверждение точно выражается такой теоремой:

Теорема 7. Каков бы ни был отрезок p и каково бы ни было натуральное число n , на прямой L_a всегда существует такой отрезок x , что

$$nx \leq p < (n+1)x. \quad (3)$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что при данном отрезке p во всяком случае существует такое число n , для которого требуемый отрезок x найдется. В самом деле, если бы такого числа n не существовало, то это означало бы, что всякий раз, как только $nx < p$, имеет место также неравенство $(n+1)x < p$, каково бы ни было целое число n , что противоречит постулату Архимеда. Более того, чисел n , при которых неравенствам (3) можно удовлетворить, существует бесчисленное множество, в противном случае существовало бы целое число N , такое, что при $n > N$ неравенство $nx < p$ влекло бы за собой $(n+1)x < p$, что противоречит постулату Архимеда. Поэтому существует неограниченная последовательность целых чисел

$$n_1, n_2, \dots, n_m, \dots, \quad (4)$$

при которых можно удовлетворить неравенствам (3) надлежащим отрезком x .

Пусть n — какое угодно натуральное число. Каково бы ни было целое положительное число h , существует неограниченное число отрезков $[kn, (k+1)n]$ при $k > h$, в каждом из которых содержится, по крайней мере, одно из чисел ряда (4). Можно поэтому при нашем заданном n найти такое число k и такое число $\tilde{n}$ ряда (4), что

$$kn \leq \tilde{n} < (k+1)n \quad (5a)$$

и

$$k > n+1. \quad (5b)$$

В таком случае существует отрезок y , удовлетворяющий неравенству $\tilde{n}y \leq p < (\tilde{n}+1)y$. Полагая $ky = x$, получим $\frac{\tilde{n}}{k}x \leq p < \frac{\tilde{n}+1}{k}x$. Но в силу неравенств (5a) и (5b) $n \leq \frac{\tilde{n}}{k}$, $\frac{\tilde{n}+1}{k} < n+1$, а потому $nx \leq p < (n+1)x$; теорема доказана.

Теорема 8. Если на архимедовой прямой дан отрезок x , такой, что $nx < p$, то существует отрезок $x' > x$, удовлетворяющий тому же неравенству $nx' < p$.

Доказательство. Так как $nx < p$, то существует отрезок r , такой, что $r = p - nx$. Пусть s будет отрезок, для которого $ns < r$. Отрезок $x+s$ удовлетворяет, очевидно, требованию теоремы.

Читатель таким же образом проведет доказательство следующего утверждения:

Теорема 9. Если на архимедовой прямой x , такой, что $nx > p$, то существует отрезок $x' < x$, удовлетворяющий тому же неравенству $nx' > p$.

5. Евклидов алгоритм и отношение двух отрезков архимедовой прямой. Пусть p и q будут два отрезка на архимедовой прямой. Положим, что отрезок q содержится в p a_0 раз, так что $a_0q \leq p < (a_0+1)q$. Отрезок r , который остается после того, как мы отложим отрезок q на p a_0 раз, есть разность $p - a_0q$. Указанные выше неравенства могут быть заменены соотношением

$$p = a_0q + r, \quad 0 \leq r < q, \quad (6)$$

которое им эквивалентно. Далее, положим, что отрезок r содержится

6. Подходящие дроби как приближенные значения отношения отрезков. Подходящие дроби непрерывной дроби (9) будем обозначать, как обыкновенно, через

$$\frac{P_n}{Q_n}.$$

Как известно, тогда

$$P_n = a_{n-1}P_{n-1} + P_{n-2}, \quad Q_n = a_{n-1}Q_{n-1} + Q_{n-2}, \quad (12)$$

$$P_0 = 1, \quad P_1 = a_0, \quad Q_0 = 0, \quad Q_1 = 1. \quad (13)$$

Дроби $\frac{P_n}{Q_n}$ суть приближенные значения непрерывной дроби (9), меньшие дроби (9) при нечетных значениях индекса n и большие ее при четных значениях n . Если непрерывная дробь конечна, то $\frac{P_n}{Q_n}$ при некотором значении n совпадает с нею, если же непрерывная дробь бесконечна, то она есть предел этих приближений: $\frac{P}{q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n}$. Нетрудно проверить, что имеют место равенства

$$r_n = (-1)^n \{Q_{n+1}p - P_{n+1}q\}. \quad (14)$$

7. Сравнение двух отрезков по значениям их отношений к третьему отрезку. Отношения двух конгруэнтных отрезков L_a к любому третьему отрезку равны. Справедливо и следующее утверждение.

Теорема 12. Если отношения двух отрезков p и p' архимедовой прямой к третьему равны, то отрезки эти конгруэнтны.

Доказательство. Если отношения $\frac{p}{q}$ и $\frac{p'}{q}$ равны, то последовательные частные $a_0, a_1, a_2, \dots$ евклидова алгоритма, ведущие к установлению одного и другого отношения, совпадают. Вместе с тем совпадают и подходящие дроби $\frac{P_n}{Q_n}$. Соответственно этому остатки r и r'_n определяются формулами:

$$r_n = (-1)^n \{Q_{n+1}p - P_{n+1}q\}, \quad r'_n = (-1)^n \{Q_{n+1}p' - P_{n+1}q\}. \quad (15)$$

Отсюда

$$(-1)^n (r'_n - r_n) = Q_{n+1} (p' - p). \quad (16)$$

Как известно, Q_{n+1} неограниченно возрастает с ростом n , поэтому при $p' > p$ правая часть в силу постулата Архимеда неограниченно возрастает, а левая часть неограниченно убывает; равенство, таким образом, возможно только при $p' \equiv p$.

Теорема 13. Если отрезок p' больше отрезка p , то

$$\frac{p'}{q} > \frac{p}{q},$$

каков бы ни был отрезок q .

Будем обозначать последовательные частные, приводящие к одному и другому отношению, через $a_0, a_1, \dots$ и $a'_0, a'_1, \dots$, а самые отношения через α и α' . Так как $p' > p$, то $a'_0 \geq a_0$. Если $a'_0 > a_0$, то $\alpha' > \alpha$. Если $a'_0 = a_0$, то $r' > r$; поэтому равенства $q = a_1 r + r_1 = a'_1 r' + r'_1$ дают $a'_1 \leq a_1$; если $a'_1 < a_1$, то $\alpha' > \alpha$; если же $a'_1 = a_1$, то $r'_1 < r_1$. Теперь равенства $r = a_2 r_1 + r_2$, $r' = a'_2 r'_1 + r'_2$ дают $a'_2 \geq a_2$. Если $a'_2 > a_2$, то $\alpha' > \alpha$; если

$a'_2 = a_2$, то $r'_2 > r_2$, и т. д. Все неполные частные a'_i не могут совпадать с a_i в силу предыдущей теоремы. Где бы расхождение ни началось, оказывается, что $a' > a$.

Из этой теоремы и теоремы 11 непосредственно вытекает предположение:

Теорема 14. Если отрезок q' на архимедовой прямой больше отрезка q , то каков бы ни был отрезок p :

$$\frac{p}{q} > \frac{p}{q'}.$$

8. Другое определение отношения двух отрезков. На архимедовой прямой даны два отрезка p и q . Пусть n будет произвольное натуральное число. Возьмем любой отрезок x , который содержится n раз в отрезке q , тогда

$$nx \leq q < (n+1)x; \quad (17)$$

положим, что тот же отрезок x содержится в p m_n раз, так что

$$m_n x \leq p < (m_n + 1)x. \quad (18)$$

Из этих соотношений в силу предыдущих теорем имеем:

$$\frac{m_n}{n+1} < \frac{p}{q} < \frac{m_n+1}{n},$$

или, обозначая $\frac{m_n}{n}$ через μ ,

$$\frac{\mu}{1 + \frac{1}{n}} < \frac{p}{q} < \mu + \frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{n} < \mu < \frac{p}{q} \left(1 + \frac{1}{n}\right);$$

но крайние члены этого неравенства стремятся оба к $\frac{p}{q}$, когда n неограниченно возрастает. Поэтому

$$\frac{p}{q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{n}. \quad (19)$$

Очень важно, что это соотношение имеет место, каков бы ни был отрезок x , удовлетворяющий неравенствам (17), (18). Вследствие этого установленное выше определение отношения двух отрезков на прямой L_a можно заменить следующим. Пусть x будет любой отрезок, содержащийся в отрезке q n раз. Положим, что он содержится в отрезке p m_n раз. Тогда числа $\frac{m_n}{n}$ при неограниченном возрастании n стремятся к определенному пределу, который не зависит от того, как выбран отрезок x из всех отрезков, содержащихся в q n раз. Этот предел и принимается за отношение отрезков p и q . Отношение $\frac{p}{q}$ может быть поэтому рассматриваемо как предел значения дроби $\frac{m_n}{n}$, когда n проходит через какие угодно неограниченно возрастающие значения.

9. Аддитивность отношения отрезков. Под этим названием разумеется следующее предложение:

Теорема 15. Отношение суммы $p' + p''$ двух отрезков к третьему отрезку q равно сумме отношений каждого из этих отрезков к третьему:

$$\frac{p' + p''}{q} = \frac{p'}{q} + \frac{p''}{q}. \quad (20)$$

Доказательство. Пусть x есть отрезок, содержащийся в отрезке q n раз, так что

$$q = nx + y, \quad 0 \leq y < x. \quad (21)$$

Положим, что этот отрезок содержится m'_n раз в отрезке p' и m''_n раз в отрезке p'' , так что

$$p' = m'_n x + r', \quad 0 \leq r' < x; \quad p'' = m''_n x + r'', \quad 0 \leq r'' < x. \quad (21a)$$

Если $p = p' + p''$, то $p = (m'_n + m''_n)x + (r' + r'')$. Если через m_n обозначим число, выражающее, сколько раз отрезок x содержится в p , то

$$\begin{aligned} m'_n + m''_n &\leq m_n \leq m'_n + m''_n + 1, \\ \frac{m'_n}{n} + \frac{m''_n}{n} &\leq \frac{m_n}{n} \leq \frac{m'_n}{n} + \frac{m''_n}{n} + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Когда n неограниченно возрастает, то первая и третья части этого двойного неравенства стремятся к общему пределу, равному $\frac{p'}{q} + \frac{p''}{q}$, чем и устанавливается равенство (20).

Аналогично устанавливается равенство

$$\frac{p' - p''}{q} = \frac{p'}{q} - \frac{p''}{q}. \quad (20a)$$

Из тождества (20), в частности, еще вытекает, что

$$\frac{p + q}{q} = \frac{p}{q} + \frac{q}{q} = \frac{p}{q} + 1. \quad (20b)$$

Читателя не затруднит, используя новое определение отношения двух отрезков, провести доказательство следующей теоремы:

Теорема 16. Каковы бы ни были отрезки архимедовой прямой p, q, r , имеют место равенства:

$$\frac{p}{q} : \frac{r}{q} = \frac{p}{r}, \quad (22)$$

$$\frac{p}{q} : \frac{p}{r} = \frac{r}{q}, \quad (23)$$

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{p} = \frac{r}{q}. \quad (24)$$

10. Пропорциональные отрезки. Если отношения отрезков архимедовой прямой $\frac{p}{q}$ и $\frac{p'}{q'}$ равны, то говорят, что эти отрезки пропорциональны и образуют пропорцию

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}. \quad (25)$$

Из этой пропорции вследствие теоремы 11 вытекает

$$\frac{q}{p} = \frac{q'}{p'}. \quad (26)$$

Если обе части равенства (25) помножим на число $\frac{q}{p'}$, то получим вследствие (24)

$$\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'}. \quad (27)$$

Это значит, что в пропорции (25) можно переставить средние члены.

Применяя это свойство к равенству с (26), получим все допустимые перестановки членов пропорции. Прибавляя к левой части равенства (25) $\frac{q}{q'}$, а к правой части $\frac{p}{p'}$ и используя теорему 15, получим:

$$\frac{p+q}{q} = \frac{p'+q'}{q'}, \quad (28)$$

а вместе с тем все обычные производные пропорции.

11. Измерение отрезков. Под измерением отрезков мы понимаем процесс, заключающийся в том, что каждому отрезку относим положительное число таким образом, чтобы: а) конгруэнтным отрезкам отвечали равные числа; б) отрезку, состоящему из нескольких отрезков, отвечало число, равное сумме чисел, отнесенных к составляющим отрезкам.

Из теорем 12—15 совершенно ясно, что на прямой L_a эта цель будет достигнута, если произвольно выберем отрезок q , которому отнесем число 1, а всякому другому отрезку p отнесем число, равное отношению $\frac{p}{q}$. Обратно, если некоторому отрезку q (так называемая единица меры) отнесем число 1, то для выполнения поставленных требований необходимо каждому отрезку p отнести число, равное отношению $\frac{p}{q}$. В самом деле, допустим, что при выбранной единице меры q тем или иным способом установлено измерение отрезков прямой. Совершенно ясно, что при выполнении требований, определяющих измерение, большему отрезку всегда будет отнесено большее число. Пусть x будет отрезок, содержащийся в q n раз, так что имеют место соотношения

$$nx \leq q < (n+1)x. \quad (29)$$

Если ξ есть число, отнесенное при измерении отрезку x , то из (29) вытекает

$$n\xi \leq 1 < (n+1)\xi. \quad (29a)$$

Положим теперь, что отрезок x содержится в p m_n раз, так что имеют место неравенства

$$m_n x \leq p < (m_n + 1)x.$$

Они обнаруживают, что

$$m_n \xi \leq \lambda < (m_n + 1)\xi, \quad (30)$$

где λ — число, отнесенное отрезку p . Из соотношений (29a), (30) следует, что

$$\frac{m_n}{n+1} < \lambda < \frac{m_n+1}{n} \quad (31)$$

при всяком значении n . При неограниченном возрастании n крайние члены этих неравенств стремятся к общему пределу, равному отношению $\frac{P}{q}$; следовательно, $\lambda = \frac{P}{q}$.

Число, отнесенное таким образом каждому отрезку, называется числом, измеряющим этот отрезок. Мы видим, что число, измеряющее отрезок на прямой L_a , вполне определено выбором единицы меры. Положим теперь, что при единице меры q число, измеряющее некоторый отрезок p , равно λ , число же, измеряющее тот же отрезок p при единице меры q' , есть λ' ; тогда

$$\lambda' : \lambda = \frac{P}{q'} : \frac{P}{q}.$$

В силу (23) отсюда следует, что

$$\lambda' = \lambda \mu,$$

где $\mu = \frac{q}{q'}$; множитель μ имеет одно и то же значение для всех отрезков p . Таким образом при переходе от одной единицы меры к другой измеряющие числа всех отрезков приобретают один и тот же множитель.

Число, измеряющее отрезок, называется также его длиной, соответствующей принятой единице меры.

Таким образом на архимедовой прямой при установленной единице меры каждому отрезку соответствует число — его длина; однако обратное утверждение было бы несправедливо: нельзя утверждать, что каждому числу соответствует отрезок на L_a , имеющий своей длиной это число. В самом деле, если примем за такую прямую множество всех рациональных чисел, то видим, что на ней нет отрезка, длина которого выражается иррациональным числом.

Каждому действительному числу отвечает отрезок, длина которого выражается этим числом, только на такой прямой, которая удовлетворяет еще одному постулату, — на непрерывной прямой.

§ 88. МЕТРИКА НЕПРЕРЫВНОЙ ПРЯМОЙ

1. Постулат Кантора. Два ряда точек $A_1, A_2, \dots; B_1, B_2, \dots$ на ориентированной прямой будем называть сближающимися, если: 1) точки каждого ряда расположены последовательно, притом так, что каждая точка A_k следует за точкой A_{k-1} , а каждая точка B_k предшествует точке B_{k-1} ; 2) все точки ряда A_k предшествуют точкам B_k . Два сближающихся ряда точек называют смежными, если отрезки $A_k B_k$ становятся на этой прямой сколь угодно малыми, т. е. если каждому существующему на этой прямой отрезку ε соответствует такое число h , что $A_k B_k < \varepsilon$, коль скоро $k > h$. Говорят, наконец, что точка A разделяет ряды точек A_k и B_k , если она лежит внутри всякого отрезка $A_k B_k$. В этих терминах второй постулат четвертой группы, присоединением которого к постулату Архимеда устанавливается непрерывность прямой, выражается следующим образом:

IV₂. Каждым двум смежными рядам точек соответствует разделяющая их точка.

Этот постулат различные авторы (Штольд [96], Бальдус [103], Шван [104] и др.) называют постулатом Кантора, ссылаясь обычно на его мемуар [105] 1872 г. Нужно сказать, однако, что положения, так сфор-

мулированного, у Кантора в этом мемуаре нет; есть соображения, из которых его в некоторой модификации можно извлечь. Мы сохраним за ним установившееся наименование.

Легко усмотреть, что постулаты Архимеда и Кантора друг от друга не зависят. В самом деле, в множестве всех рациональных чисел (на «рациональной» прямой) постулат Архимеда имеет место, между тем как постулат Кантора не выполняется. Так, если примем за A_k приближенно меньшее значение $\sqrt{2}$, вычисленное с точностью до $\frac{1}{10^k}$, а через B_k такое же приближенно большее значение, то числа, разделяющего эти два ряда точек, в этом множестве не существует. Этим установлена одновременно независимость постулата Кантора от постулатов I, II, III групп. Напротив, в множестве Веронезе, которое мы описали в рубр. 5 § 86, постулат Архимеда не выполняется, между тем как постулат Кантора в нем выполняется.

В самом деле, легко усмотреть, что в этом множестве два ряда точек A_k и B_k могут быть смежными только в том случае, если при достаточно больших значениях k точки лежат на одной и той же параллели: иначе говоря, если $a_k + n_k i$ и $b_k + m_k i$ суть точки A_k и B_k , то для значений k , превышающих некоторое число h ($k > h$), должно быть $n_k = m_k = n$, иначе ряды не могут быть смежными. Но в таком случае при $k > h$ каждый отрезок $A_k B_k$ есть отрезок совокупности R действительных чисел, а потому разделяющая точка в нем всегда существует.

Два постулата — Архимеда и Кантора — составляют IV группу постулатов — постулаты непрерывности.

Теорема 1. На прямой L_a смежные ряды точек могут разделяться не более чем одной точкой.

Действительно, если бы существовали две разделяющие точки A и B , то отрезок $A_i B_i$ оставался бы больше AB , т. е. ряды не были бы смежными.

Прямую, удовлетворяющую всем постулатам I — IV, будем обозначать через L_{IV} .

2. Непрерывная прямая. Как известно, Дедекин^[106] определил непрерывность числового ряда следующим образом. Он называет сечением числового множества такое деление его на две части, при котором каждое число первой части меньше каждого числа второй части. Если множество всюду плотное, то обе части не могут иметь крайних элементов, т. е. не может быть, чтобы первая часть имела последний элемент и чтобы вторая часть в то время имела первый элемент; в самом деле, если бы это имело место, то числа, содержащиеся между этими крайними элементами (а таковые во всюду плотном множестве должны быть), не попадали бы ни в одну, ни в другую часть сечения. По Дедекинду всюду плотный числовой ряд называется непрерывным, если в нем каждое сечение производится некоторым числом, т. е. если при каждом сечении существует число, которое либо замыкает первую часть (служит последним элементом первой части), либо начинает вторую часть (служит первым элементом второй части).

Теорема 2. Прямая L_{IV} есть непрерывное множество.

Нужно показать, что всякое дедекиндово сечение прямой производится некоторой ее точкой. Доказательство осуществляется приемом, известным под названием метода Больцано. Пусть задано некоторое сечение прямой L_{IV} . Возьмем какой-нибудь внутренний элемент A_a

множества $\mathcal{A}$, составляющего первую часть сечения, и какой-либо внутренний элемент B_0 множества $\mathcal{B}$, составляющего вторую часть сечения; таким образом между A_0 и B_0 имеются как точки множества $\mathcal{A}$, так и точки множества $\mathcal{B}$; все остальные точки множества $\mathcal{A}$ предшествуют точке A_0 , все остальные точки множества $\mathcal{B}$ следуют за B_0 . Возьмем произвольное натуральное число $n > 1$. Пусть q_0 — отрезок, содержащийся в A_0B_0 n раз. Отложив отрезок q_0 n раз от точки A_0 , мы разобьем отрезок A_0B_0 на n или $n+1$ отрезков (n , если $nq_0 \equiv A_0B_0$, $n+1$, если $nq_0 < A_0B_0$). Если какая-либо из точек деления принадлежит множеству $\mathcal{A}$ и следует за всеми остальными точками этого множества, то она есть последняя точка этого множества, т. е. производит рассматриваемое сечение; то же имеет место, если какая-либо точка деления принадлежит множеству $\mathcal{B}$ и предшествует всем остальным его точкам. Если ни то, ни другое не имеет места, то существует один и только один из отрезков подразделения, в котором имеются как точки множества $\mathcal{A}$, так и точки множества $\mathcal{B}$; мы его обозначим через A_1B_1 . Вместе с тем, все точки нашей прямой распадутся на три категории: точки, предшествующие точке A_1 (это точки множества $\mathcal{A}$), точки, следующие за точкой B_1 (это точки множества $\mathcal{B}$), и точки, лежащие между A_1 и B_1 . Пусть теперь q_1 будет отрезок, содержащийся в отрезке A_1B_1 n раз, так что

$$nq_1 \leq A_1B_1, \quad n^2q_1 \leq A_0B_0. \quad (1)$$

Если ни одна из точек деления не производит рассматриваемого сечения, то мы опять придем к некоторому отрезку A_2B_2 и все точки прямой вновь разобьются на три категории. К первой категории относятся точки множества $\mathcal{A}$, предшествующие точке A_2 ; вторую образуют точки категории $\mathcal{B}$, следующие за B_2 ; третью образуют точки, принадлежащие отрезку A_2B_2 , среди которых имеются как точки категории $\mathcal{A}$, так и точки категории $\mathcal{B}$.

Продолжая то же рассуждение, возьмем отрезок q_2 , содержащийся в A_2B_2 n раз, так что

$$nq_2 \leq A_2B_2, \quad n^3q_2 \leq A_0B_0, \quad (2)$$

и вновь произведем последовательное его отложение на A_2B_2 . Мы придем к отрезку A_3B_3 , причем точки прямой вновь распадутся на три категории того же рода. Развертывая то же выделение отрезков, содержащих как точки множества $\mathcal{A}$, так и точки множества $\mathcal{B}$, мы либо придем к точке, производящей рассматриваемое сечение, либо придем к рядам точек $A_0, A_1, \dots; B_0, B_1, \dots$, смежным между собой. Каждая точка A множества $\mathcal{A}$ либо окажется предшествующей какой-либо точке A_k (а следовательно, и всем последующим точкам A_l ($l > k$)), либо будет оставаться внутри всех отрезков A_lB_l ; аналогично обстоит дело с точками B множества $\mathcal{B}$. Так как мы допустили, что на нашей прямой имеет место постулат Кантора, а ряды A_l и B_l смежные, то существует точка C , разделяющая эти ряды; покажем, что эта точка производит рассматриваемое сечение прямой. Так как сечение охватывает всю прямую, то точка C принадлежит либо категории $\mathcal{A}$, либо категории $\mathcal{B}$; положим, что она есть точка множества $\mathcal{A}$; докажем, что она есть последняя точка этого множества. С этой целью допустим, что во множестве $\mathcal{A}$ есть точка A , следующая за C . Как всякая точка этого множества, она должна либо предшествовать какой-либо точке A_k , либо должна содержаться во всех отрезках A_lB_l . Но совершенно ясно, что ни то, ни

другое не может иметь места. В самом деле, если бы точка A предшествовала какой-либо точке A_k , то она предшествовала бы и точке C , что не может иметь места; если бы точка A содержалась во всех отрезках AB_i , то мы могли бы выбрать l настолько большим, чтобы $AB_l < CA$, но тогда $CB_l < CA$, т. е. точка A лежала бы за точкой B_l , что противно условию.

Совершенно аналогично обнаружим, что точка C начинает множество $\mathfrak{B}$, если она принадлежит ему. Теорема таким образом доказана.

Тем самым показано, что принцип Дедекинда есть следствие постулатов I—IV. Можно было бы показать и обратное, что из постулатов I—III и принципа Дедекинда следует как постулат Архимеда, так и постулат Кантора (см., например, [104]).

Заметим, что теорема остается справедливой, если производится сечение не всей прямой, а какого-либо луча или отрезка.

3. Принцип Дедекинда в множестве отрезков ориентированной непрерывной прямой. Следующее предложение по существу выражает то же предложение, что и предыдущее, только в других терминах.

Теорема 3. Если все отрезки непрерывной ориентированной прямой разбиты на две категории $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ так, что каждый отрезок a первой категории меньше каждого отрезка b второй категории, то либо в первой категории существует наибольший отрезок, т. е. отрезок, превышающий все не конгруэнтные ему отрезки этой категории, либо во второй категории существует наименьший отрезок, т. е. отрезок, меньший каждого не конгруэнтного ему отрезка.

Доказательство. Взяв произвольную точку O , отложим от нее на выходящем из нее луче, обращенном в сторону ориентации прямой, все отрезки a того же обращения. В силу постулатов III_4 и III_5 каждому отрезку a соответствует одна и только одна такая точка A , что $OA \equiv a$. Всем конгруэнтным отрезкам a при этом отвечает одна и только одна точка A . Если же $a' > a$ (или $a' < a$), а A' и A — соответствующие точки на нашем луче, то $OA' > OA$ (или $OA' < OA$), т. е. точка A' следует за A (или предшествует A). Вследствие этого деление всех отрезков на две категории соответствует такое разбиение точек луча на две категории, которое образует дедекиндово сечение. Поэтому на луче существует либо последняя точка первой категории, либо первая точка второй категории.

Если какой-либо отрезок является, скажем, наибольшим в первой категории, то тем же свойством обладает и всякий конгруэнтный ему отрезок, отрезки, ему не конгруэнтные, этим свойством, конечно, обладать не могут. В этом смысле часто говорят, что существует один и только один наименьший отрезок второй категории.

4. Метрика непрерывной прямой. Метрика непрерывной прямой определяется нижеследующими теоремами.

Теорема 4. Каков бы ни был отрезок p на непрерывной ориентированной прямой и каково бы ни было натуральное число n на ней, всегда существует один и только один отрезок q , составляющий n -ю его часть (т. е. такой, что $nq = p$).

Доказательство. Совокупность всех отрезков нашей ориентированной прямой разобьем на две категории, относя к первой категории все отрезки s , для которых $ns \leq p$, а ко второй — все отрезки t , для которых $nt > p$. Ясно, что этим образуется декиндово сечение и, следовательно, либо в первой категории существует наибольший отрезок, либо во второй категории существует наименьший отрезок. Однако наименьшего отрезка второй категории быть не может; в самом деле, каков бы ни был отрезок t второй категории (так что $nt > p$), согласно теореме 9 § 87 существует меньший отрезок, удовлетворяющий тому же неравенству. Следовательно, существует наибольший отрезок q первой категории. Легко видеть, что $pq \equiv p$; ибо, если было бы $pq < p$, то в силу теоремы 8 § 87 существовал бы отрезок $q' > q$, удовлетворяющий тому же неравенству, т. е. отрезок q не был бы последним (наибольшим) в первой категории.

Отрезков q , удовлетворяющих требованиям теоремы, имеется бесчисленное множество, но все они конгруэнтны между собой; в этом смысле мы и говорим о единственности отрезка q .

Совершенно аналогично доказывается следующая теорема:

Теорема 5. Каково бы ни было положительное число λ и отрезок q ориентированной прямой, на ней всегда существует один и только один отрезок p , для которого $\frac{p}{q} = \lambda$.

5. Произведение отрезка на положительное число. Если отрезки p и q удовлетворяют отношению $\frac{p}{q} = \lambda$, то мы будем говорить, что отрезок p равен произведению отрезка q на число λ , и писать

$$p = \lambda q. \quad (3)$$

Это определение приводит к следующим тождествам, выражающим основные свойства произведения отрезка на число:

$$\lambda(p \pm q) = \lambda p \pm \lambda q, \quad (4)$$

$$(\lambda + \mu)p = \lambda p + \mu p, \quad (5)$$

$$\lambda(\mu p) = (\lambda\mu)p, \quad (6)$$

$$1 \cdot p = p. \quad (7)$$

Чтобы доказать тождество (4), возьмем пропорцию $\frac{\lambda p}{p} = \frac{\lambda q}{q} = \lambda$. Отсюда в силу свойств пропорции (см. рубр. 10 § 87) следует $\frac{\lambda p}{\lambda q} = \frac{p}{q}$, что дает $\frac{\lambda p \pm \lambda q}{\lambda q} = \frac{p \pm q}{q}$, отсюда $\frac{\lambda p \pm \lambda q}{p \pm q} = \frac{\lambda q}{q} = \lambda$ и, наконец, $\lambda p \pm \lambda q = \lambda(p \pm q)$. Справедливость тождества (5) устанавливается из того, что

$$\frac{\lambda p + \mu p}{p} = \frac{\lambda p}{p} + \frac{\mu p}{p} = \lambda + \mu.$$

Аналогично доказывается тождество (6). Действительно,

$$\frac{\lambda(\mu p)}{\mu p} = \lambda, \quad \frac{\mu p}{p} = \mu.$$

Применяя же равенство (24) § 87, получим:

$$\left(\frac{\lambda(\mu p)}{\mu p} \cdot \frac{\mu p}{p} = \right) \frac{\lambda(\mu p)}{p} = \lambda\mu,$$

что и доказывает тождество (6).

Тождество (7) имеет место потому, что отношение всякого отрезка к самому себе равно 1.

Заметим еще, что $\lambda p \leq \mu p$, если соответственно $\lambda \leq \mu$, как это вытекает из тождества (5).

6. Нулевой отрезок. Тождества (4) — (7) предполагают, что λ и μ — действительные числа, большие нуля. Чтобы распространить эту арифметику отрезков и на случай чисел, равных нулю, вводят понятие о вырожденном или нулевом отрезке. Под нулевым отрезком понимают, как часто говорят, отрезок, концы которого совпадают, — отрезок, выродившийся в точку; нулевой отрезок (т. е. точку, рассматриваемую как отрезок) обозначают через 0. Так как нулевой отрезок существенно отличается от обыкновенных отрезков (он не содержит бесчисленного множества точек), то и определения суммы отрезков, отношения отрезков, произведения отрезка на число, данные для обыкновенных отрезков, непригодны, когда среди отрезков есть нулевой отрезок; это требует специальных определений. С этой целью устанавливаются следующие положения:

1) Сумма всякого отрезка p с нулевым отрезком 0 равна этому же отрезку p :

$$0 + p = p + 0 = p. \quad (8)$$

Сохраняя обычное определение разности, заключаем, что, каков бы ни был отрезок p , имеет место равенство

$$p - p = 0. \quad (9)$$

Равенство $q - p = 0$ можно рассматривать как необходимое и достаточное условие того, что $q = p$.

2) Отношение нулевого отрезка ко всякому другому не нулевому отрезку принимается равным нулю:

$$\frac{0}{p} = 0, \text{ если } p \neq 0. \quad (10)$$

В соответствии с этим полагаем $0 \cdot p = 0$, каков бы ни был отрезок p . Отношение отрезка $p \neq 0$ к отрезку 0 не может быть выражено никаким определенным числом.

Читатель без труда усмотрит, что тождества (4) — (6) остаются в силе и в том случае, если одно из чисел λ и μ или оба они равны нулю. Иными словами, эти соотношения остаются в силе для всех арифметических чисел λ и μ , если под «арифметическими» разуметь положительные числа с присоединением к ним числа 0.

7. Длина отрезка непрерывной прямой; координата точек прямой. Сохраняя определение числа, измеряющего отрезок, или длины отрезка, данное в рубр. 11 § 87, мы теперь видим, что на непрерывной прямой каждому арифметическому числу λ при выбранной единице меры (каковой всегда должен служить невырожденный отрезок) отвечает отрезок, имеющий это число длиной, точнее, таких отрезков всегда имеется бесчисленное множество, но все они конгруэнтны между собой. Отожде-

ставляя конгруэнтные отрезки, обыкновенно говорят, что каждому арифметическому числу отвечает один и только один отрезок, имеющий это число своей длиной. Таким образом длина отрезка характеризуется следующими ее свойствами:

- 1) Длина отрезка есть арифметическое число, однозначно определяемое выбором единицы меры.
- 2) Конгруэнтные отрезки имеют одинаковую длину и, обратно, отрезки, имеющие одинаковую длину (мы всегда подразумеваем при той же единице меры), конгруэнтны.
- 3) Большему отрезку всегда отвечает большая длина, и обратно.
- 4) Длина отрезка равна нулю в том и только в том случае, когда этот отрезок вырождается в точку.
- 5) Если отрезок состоит из нескольких отрезков, то его длина равна сумме длин всех составляющих отрезков.

Заметим, что перечисленные свойства длины не все являются независимыми.

Длину отрезка прямой, определяемого двумя точками, называют также расстоянием между этими точками. Таким образом на ориентированной прямой расстояние между двумя точками всегда выражается арифметическим числом и обращается в нуль только в том случае, когда две точки совпадают.

Теперь мы имеем возможность установить координацию точек ориентированной прямой L_{IV} . Именно, выбрав на непрерывной ориентированной прямой произвольно «начальную точку» O , отнесем каждой точке M прямой число x , равное длине отрезка OM , взятое со знаком $+$, если точка M следует за точкой O , и со знаком $-$, если точка M предшествует точке O ; самой точке O , естественно, будет при этом отнесено число 0. Число x , отнесенное таким образом точке M прямой L_{IV} , называется ее абсциссой (координатой). Так как каждому положительному числу соответствует отрезок, имеющий это число своей длиной, то каждому действительному числу x отвечает одна и только одна точка прямой L_{IV} , имеющая число x своей абсциссой. Если M_0 есть точка прямой L_{IV} , имеющая абсциссой число 1, то OM_0 представляет отрезок, принятый на прямой L_{IV} за единицу меры. Пусть теперь M_1 и M_2 будут две точки, следующие на нашей прямой L_{IV} за началом координат O и притом в последовательности OM_1M_2 . Если x_1 и x_2 суть абсциссы точек M_1 и M_2 , то x_1 есть длина отрезка OM_1 , x_2 — длина отрезка OM_2 , а следовательно, $x_2 - x_1$ — длина отрезка M_1M_2 . Читатель легко покажет, что это остается справедливым, как бы точки M_1 и M_2 ни были расположены относительно начала координат O . Длина каждого отрезка равна разности абсцисс его конечной и начальной точек.

Координация может быть в том же порядке идей установлена не только на непрерывной, но и на любой архимедовой прямой; но если прямая не непрерывна, то не всякому значению абсциссы соответствует точка прямой.

8. Изоморфные прямые. Координация точек непрерывной прямой, установленная в предыдущей рубрике, приводит ее точки во взаимно однозначное соответствие с элементами (точками-числами) множества R .

всех действительных чисел. Если рассматривать это множество (мы не раз уже это делали) как числовую прямую с натуральной последовательности точек (чисел), то можно сказать, что всякая непрерывная ориентированная прямая может быть приведена во взаимно однозначное соответствие с числовой прямой. Это соответствие может быть установлено так, чтобы точки данной прямой следовали друг за другом в том же порядке, как соответствующие точки (числа) прямой $\mathbb{R}$, и чтобы конгруэнтным отрезкам соответствовали конгруэнтные (равные) отрезки числовой прямой. Две прямые, точки которых могут быть приведены во взаимно однозначное соответствие с соблюдением указанных двух условий, с сохранением последовательности точек и конгруэнтности отрезков, называются изоморфными. Предыдущий результат сформулируем следующим образом.

Теорема 6. Всякая непрерывная ориентированная прямая изоморфна числовой прямой $\mathbb{R}$.

Отсюда следует и дальнейший вывод.

Теорема 7. Все непрерывные ориентированные прямые изоморфны между собой.

В связи с этим нужно сделать следующее существенное замечание. Мы пользовались термином «прямая», устанавливая «аксиоматику прямой». В качестве пространственного образа, к которому эта аксиоматика применяется, не обязательно представлять себе прямую в ее обыкновенном образе (скажем, в виде светового луча). Интерпретацией этой геометрии может служить и всякий другой изоморфный образ, например, парабола, окружность с удаленной точкой и т. д. Имея это в виду, некоторые авторы говорят об аксиоматике «линейного множества».

9. Полнота геометрической системы. Возвратимся теперь к истории вопроса о постулатах, определяющих непрерывность прямой. Гильберт в первом издании своих «Оснований» устанавливает группу аксиом (по его счету V) под названием «аксиом непрерывности», но в эту группу он вводит только одну аксиому, именно, аксиому Архимеда. Непосредственно после появления книги Гильберта различными авторами было указано, что этой аксиомой не исчерпывается непрерывность прямой в установившемся значении этого слова. Вследствие этого Гильберт уже со второго издания «Оснований» ввел в эту группу еще вторую аксиому, которую называют аксиомой полноты и которую можно формулировать следующим образом.

Точки прямой составляют множество, которое при наличии предыдущих аксиом (I—IV) не допускает дальнейшего расширения.

Несколько тяжеловесное содержание этого допущения привело к тому, что большинство авторов, занимавшихся этим предметом после Гильберта (Веблен^[107], Шван^[104], Бальдус^[103] и др.), предпочли заменить его более простым допущением; в качестве такового вводится в той или иной модификации текста принятый нами выше постулат Кантора; инициатива в этом отношении принадлежит, повидимому, Веблену^[107], который, впрочем, также формулирует постулат несколько иначе. Существенной заслугой Гильберта является то, что он расщепил принцип Дедекинда, которым обыкновенно устанавливалась непрерывность линейного множества, на две аксиомы (по терминологии Гильберта). Но относительно аксиомы полноты нельзя говорить о ее независимости от остальных, так как она приобретает содержание только

в том случае, если ей предпослана вся совокупность аксиом порядка, структуры, конгруэнтности и аксиома Архимеда. Между тем, постулаты Архимеда и Кантора, как мы видели, не зависят друг от друга; они действительно осуществляют разбиение принципа непрерывности на два независимых постулата. В совокупности же с остальными аксиомами они гарантируют полноту системы. В самом деле, мы видели, что все множества (прямые), которые удовлетворяют постулатам I—IV, изоморфны между собой и, в частности, изоморфны числовой прямой R . Но хорошо известно, что множество всех действительных чисел не поддается обогащению с сохранением всей их арифметики, основанной на постулатах I—IV; аксиома полноты является поэтому следствием системы аксиом I—IV.

Нетрудно и непосредственно обнаружить, что полнота геометрической системы есть следствие постулатов I—IV. Действительно, допустим, что множество точек $\mathfrak{M}$, удовлетворяющее постулатам I—IV, может быть обогащено точками с сохранением тех свойств, которые выражаются постулатами I—IV, а следовательно, и принципом Дедекинда. Пусть $\tilde{\mathfrak{M}}$ будет обогащенное множество. Будем обозначать тильдой приобщенные точки. Произведем сечение в множестве $\tilde{\mathfrak{M}}$, относя к категории $\mathfrak{A}$ точку $\tilde{A}$ и все предшествующие ей точки, к категории $\mathfrak{B}$ — все точки, следующие за $\tilde{A}$; точка $\tilde{A}$, таким образом, производит это сечение, являясь последней точкой категории $\mathfrak{A}$. Вместе с тем произведено сечение и во множестве $\mathfrak{M}$; оно распадается на две категории $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, причем $\mathfrak{A}$ входит в $\tilde{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{B}$ входит в $\tilde{\mathfrak{B}}$ (очевидно, категории $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ не пусты). Так как на прямой $\mathfrak{M}$ имеет место принцип Дедекинда, то на ней существует точка, производящая это сечение, т. е. существует либо последняя точка категории $\mathfrak{A}$, либо первая точка категории $\mathfrak{B}$. Ни та, ни другая точка не может совпасть с $\tilde{A}$, ибо последняя множеству $\mathfrak{M}$ не принадлежит. Допустим, что сечение в $\mathfrak{M}$ производит последняя точка A категории $\mathfrak{A}$; она принадлежит также категории $\tilde{\mathfrak{A}}$ в $\tilde{\mathfrak{M}}$ и предшествует в ней точке $\tilde{A}$. Теперь возьмем точку B категории $\mathfrak{B}$; она принадлежит также категории $\tilde{\mathfrak{B}}$ и потому точка $\tilde{A}$ лежит между A и B ; следовательно, расстояние $A\tilde{A}$ меньше AB . Но точка B может быть выбрана так, чтобы расстояние AB было меньше любого наперед заданного расстояния, например меньше расстояния $A\tilde{A}$; мы приходим, таким образом, к противоречию. К такому же противоречию приводит допущение, что сечение во множестве $\mathfrak{M}$ производит первая точка категории $\mathfrak{B}$. Приобщение точек с сохранением постулатов I—IV невозможно. Рассуждение, впрочем, предполагает, что приобщение не нарушает структуры множества $\mathfrak{M}$ в том смысле, что не изменяется и расстояние точек этого множества $\mathfrak{M}$.

В настоящее время можно считать общепринятым следующее определение полноты геометрической системы.

Система постулатов, определяющих геометрические множества, считается полной, если все множества, на которых она получает осуществление, изоморфны.

Мы можем, таким образом, высказать следующее предложение:

Теорема 8. Постулаты I—IV составляют полную систему постулатов прямой (линейного множества).

Главное значение расщепления принципа Дедекинда заключается в том, что оно дало возможность отличать неархимедову, архимедову и непрерывную прямую.

§ 89. ДВИЖЕНИЯ ПРЯМОЙ В СЕБЕ

1. Группа движений ориентированной прямой в себе. Аксиомы (постулаты) конгруэнтности Гильберт называет также аксиомами движения. Настоящий параграф имеет целью оправдать это наименование. На непрерывной или архимедовой ориентированной прямой установим взаимно однозначное соответствие точек, выражаемое в координатах уравнением

$$x' = x + a. \quad (1)$$

В случае непрерывной прямой a может иметь любое действительное значение, в случае архимедовой прямой a может иметь любое значение, способное выражать длину отрезка этой прямой. Если рассматривать a как параметр, то уравнение (1) выражает ∞^1 отображений прямой на себя, которые образуют группу. Эти отображения будем рассматривать как движения прямой в себе в смысле установок Эрлангенской программы. Эта группа транзитивная, две точки (x_1, x_2) имеют инвариант $x_2 - x_1$. Больше число точек не имеет инвариантов, независимых от первых инвариантов. В самом деле, если $\omega(x_1, x_2, x_3)$ есть инвариант трех точек, то

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = \omega(x_1 + a, x_2 + a, x_3 + a).$$

Зафиксировав значение x_3 , положим здесь $a = -x_3$. Тогда

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = \omega(x_1 - x_3, x_2 - x_3, 0) = \varphi(x_1 - x_3, x_2 - x_3);$$

а так как x_3 все же может иметь произвольные значения, то это равенство выражает, что $\omega(x_1, x_2, x_3)$ есть функция парных инвариантов. Таким образом согласно установкам Клейна — Ли постулаты I—IV определяют своей группой изометрии (группой движений) метрическую геометрию прямой. Если точки M_1, M_2, M_3 расположены последовательно в сторону ориентации прямой, т. е. $x_1 < x_2 < x_3$, то уравнение (1) при любом значении a дает $x'_1 < x'_2 < x'_3$. Это значит, что всякое движение переводит три последовательные точки в три последовательные же точки. Иначе говоря, если какое-либо движение переводит две точки M_1 и M_2 в точки M'_1 и M'_2 , то оно совмещает весь отрезок M_1M_2 с отрезком $M'_1M'_2$. Так как при этом

$$x'_2 - x'_1 = x_2 - x_1, \quad (2)$$

то движение совмещает каждый отрезок с конгруэнтным ему отрезком (§ 88, рубр. 7). Обратно, если отрезок $M_1M_2[x_1, x_2]$ конгруэнтен отрезку $M'_1M'_2[x'_1, x'_2]$, то имеет место равенство (2). Если в уравнении (1) положим $a = x'_1 - x_1 = x'_2 - x_2$, то соответствующее движение переводит точки M_1 и M_2 в точки M'_1 и M'_2 , а вместе с тем совмещает отрезок M_1M_2 с отрезком $M'_1M'_2$. Таким образом можно сказать, что на прямой, определяемой постулатами I—IV, конгруэнтными являются все отрезки, которые могут быть приведены в совмещение движением.

2. Аксиоматика конгруэнтности, выраженная в терминах теории групп. Можно в этом направлении идти и дальше, заменив постулаты конгруэнтности другими, которые характеризуют свойственные ориентированной прямой движения; иначе говоря, постулаты конгруэнтности можно заменить постулатами движения и из них вывести все те утверждения, которые содержатся в постулатах конгруэнтности.

Итак, сохраняя постулаты расположения и структуры (группы I и II), мы принимаем, что на ориентированной прямой L_{II} установлены взаимно однозначные отображения ее на самое себя, которые называем движениями. Эти отображения должны образовать группу. Так как конгруэнтность рассматривается как один из видов равенства, то постулаты конгруэнтности, как уже было указано выше, распадаются на две группы: первые три Π_1 — Π_3 устанавливают свойства, присущие всякому равенству, т. е. характеризующие равенство как таковое (соотношение α и постулаты 4, 5, 6 в системе С. О. Шатуновского). Остальные постулаты III группы, специфически геометрические, характеризуют конгруэнтность отрезков ориентированной прямой. Аналогично этому, устанавливая постулаты движения, мы начнем с четырех, которые выражают основное требование Эрлангенской программы, а именно, чтобы отображения, выражающие движения пространства, составляли группу преобразования. Иными словами, постулаты Π_1 — Π_4 характеризуют группу преобразований. Следующие же три постулата, специфически геометрические, характеризуют движения, свойственные ориентированной прямой.

Π_1 . Всякое движение переводит каждую точку M ориентированной прямой в некоторую точку M' и, наоборот, в каждую точку M' переводит некоторую точку M .

Π_2 . Всякое движение переводит две различные точки прямой в две различные ее точки.

Эти два постулата устанавливают взаимную однозначность тех преобразований, которые служат движениями прямой в себе.

Π_3 . Каждому движению прямой в себе соответствует обратное движение.

Это значит, если некоторое движение S переводит произвольную точку M прямой в точку M' , то существует движение S' , переводящее каждую точку M' в соответствующую точку M .

Π_4 . Если существует движение S , переводящее произвольную точку M прямой в точку M' , и другое движение S' , переводящее каждую точку M' соответственно в M'' , то существует также движение $(S'S)$, переводящее каждую точку M в соответствующую точку M'' .

Различные определения группы преобразований несколько отличаются одно от другого. Приведенные постулаты содержат одну из таких формулировок. Они непосредственно приводят к следующему следствию, также свойственному всякой группе:

Среди движений прямой существует такое, которое оставляет все ее точки в покое.

В самом деле, пусть S будет произвольное движение прямой, S' —обратное движение (Π_3). Тогда движение $S'S$ (Π_4) совмещает каждую точку прямой с самой собой, т. е. оставляет все точки прямой в покое.

Обращаемся к постулатам, выражающим специфические свойства ориентированной прямой.

Π_5 . Каждое движение ориентированной прямой переводит две точки M и M_1 прямой в две точки M' и M'_1 той же последовательности.

Это означает, что если точка M предшествует точке M_1 , то и точка M' предшествует точке M'_1 .

Π_6 . Каковы бы ни были две точки M и M' , существует движение, переводящее точку M в точку M' .

Группа движений транзитивна.

Π_7 . Если движение оставляет какую-либо точку прямой в покое (относит ее самой себе), то оно оставляет в покое все точки прямой.

3. Непротиворечивость и независимость постулатов движения. Если рассмотрим числовую прямую R , а за движения примем группу преобразований, выражаемую уравнением

$$x' = x + a \quad (3)$$

при произвольных действительных значениях a , то все постулаты Π_1 — Π_7 будут удовлетворены (как и все постулаты группы I, II, IV). Непротиворечивость этих постулатов таким образом установлена.

Обращаясь к вопросу о независимости постулатов этой категории, мы имеем собственно в виду геометрические постулаты Π_5 , Π_6 и Π_7 , совершенно так же, как мы это делали при рассмотрении независимости постулатов конгруэнтности.

Чтобы установить в этом смысле независимость постулата Π_5 от остальных, рассмотрим вновь множество R , но за движения примем группу

$$x' = \pm x + a \quad (4)$$

при любых действительных значениях a . Все постулаты удовлетворены, кроме Π_5 . В самом деле, преобразование $x' = -x + a$ не сохраняет, а обращает последовательность точек ориентированной прямой.

Если же в том же множестве R за группу движений примем преобразование

$$x' = x + n, \quad (5)$$

где n —целое число (положительное, отрицательное или нуль), то в этом случае будут выполнены все постулаты, кроме Π_6 . Группа не транзитивна.

Если, напротив, в множестве R возьмем в качестве движения более широкую группу преобразований, чем (1), именно

$$x' = bx + a \quad (6)$$

с произвольным положительным параметром b , то в этом случае будут удовлетворены все постулаты, кроме Π_7 , ибо при $b \neq 1$ уравнению

$$x_1 = bx_1 + a \quad (6a)$$

можно удовлетворить при любом заданном $x = x_1$ надлежащим выбором параметра a без того, чтобы преобразование (6) обращалось в тождество.

4. Вывод требований, содержащихся в постулатах конгруэнтности, из постулатов движения. Теперь покажем, что постулаты движения влекут за собой выполнение всех требований, содержащихся в постулатах конгруэнтности. При этой видоизмененной аксиоматике точкой отправления служит следующее основное определение.

Основное определение. Если существует движение, совмещающее образ $\mathfrak{F}$ с образом $\mathfrak{F}'$, то мы будем говорить, что образ $\mathfrak{F}$ конгруэнтен образу $\mathfrak{F}'$; в символах $\mathfrak{F} \equiv \mathfrak{F}'$.

Отсюда следует, что соотношение конгруэнтности обладает основными свойствами равенства: возвратностью, обратимостью и транзитивностью. В самом деле, так как среди движений имеется такое, которое оставляет все точки в покое, т. е. совмещает каждый образ с самим собою, то каждый образ конгруэнтен самому себе (возвратность, постулат III₁). Так как каждому движению отвечает и обратное движение, то соотношение $\mathfrak{F} \equiv \mathfrak{F}'$ влечет за собой $\mathfrak{F}' \equiv \mathfrak{F}$ (обратимость, постулат III₂). Наконец, постулат III₃, как уже было выяснено при изложении общих идей Клейна, обеспечивает транзитивность конгруэнтных образов: из $\mathfrak{F} \equiv \mathfrak{F}'$ и $\mathfrak{F}' \equiv \mathfrak{F}''$ следует $\mathfrak{F} \equiv \mathfrak{F}''$.

Чтобы применить это к конгруэнтности отрезков, остановимся на следующем соображении. Из постулата III₅ непосредственно следует, что при движении ориентированной прямой три точки A, B, C , из которых B лежит между A и C , переходят в три точки A', B', C' , из которых B' лежит между A' и C' . Если поэтому некоторое движение переводит точки A и B в точки A' и B' , то оно совмещает каждую внутреннюю точку отрезка AB с внутренней точкой отрезка $A'B'$. Обратно, в каждую внутреннюю точку отрезка $A'B'$ переводит внутреннюю точку отрезка AB ; оно совмещает отрезок AB с отрезком $A'B'$. Иначе говоря, если существует движение, совмещающее точки A и B с точками A' и B' , то отрезок AB конгруэнтен отрезку $A'B'$. В связи с этим приходим к следующим предложениям, которые показывают, что постулаты движения влекут за собой все соотношения, устанавливаемые постулатами конгруэнтности.

Теорема 1. Каждый отрезок конгруэнтен самому себе.

Теорема 2. Если отрезок AB конгруэнтен отрезку A_1B_1 , то и отрезок A_1B_1 конгруэнтен отрезку AB .

Теорема 3. Если отрезок AB конгруэнтен отрезку $A'B'$, а отрезок $A'B'$ конгруэнтен отрезку $A''B''$, то отрезок AB конгруэнтен отрезку $A''B''$.

Теорема 4. Если вершинные отрезки OA и OB одного и того же луча конгруэнтны, то точки A и B совпадают.

В самом деле, движение, совмещающее отрезок OA с отрезком OB , оставляет точку O в покое; следовательно, оно оставляет в покое все точки прямой (III₇), а так как оно совмещает точку A с точкой B , то эти точки совпадают.

Теорема 5. Если отрезки AO и BO ориентированной прямой, оканчивающиеся в общей точке O , конгруэнтны, то точки A и B совпадают.

Доказательство совершенно аналогично предыдущему.

Теорема 6. Каковы бы ни были отрезок AB ориентированной прямой AB и точка O на ней, существует такая точка C этой прямой, что отрезок $OC \equiv AB$.

В самом деле, движение $(\tilde{\Pi}_6)$, которое совмещает точку A с точкой O , совмещает точку B с требуемой точкой C .

Теорема 7. Каковы бы ни были отрезок AB ориентированной прямой и точка O на ней, существует такая точка D прямой, что $DO \equiv AB$.

Доказательство совершенно аналогично предыдущему.

Теорема 8. Если AC есть отрезок ориентированной прямой AC и B — внутренняя его точка, а B' есть внутренняя точка другого отрезка $A'C'$ и $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, то отрезок AC конгруэнтен отрезку $A'C'$ ($AC \equiv A'C'$).

Доказательство. Положим, что движение S совмещает точку B с точкой B' ($\tilde{\Pi}_6$). Тогда C совместится при этом с точкой $\tilde{C}$ и отрезок $B'\tilde{C}$ будет конгруэнтен отрезку BC , а следовательно, и отрезку $B'C'$, а поэтому (теорема 4) точка $\tilde{C}$ совпадет с C' . Иначе говоря, движение S совмещает точку C с точкой C' . Таким же образом, опираясь на теорему 5, докажем, что движение S совмещает точку A с точкой A' . Следовательно, отрезок AC конгруэнтен отрезку $A'C'$.

Мы видим, что при наличии всех остальных постулатов, т. е. групп постулатов I, II и IV, совокупность постулатов движения $\tilde{\Pi}$ эквивалентна совокупности постулатов конгруэнтности III. Она дает, правда, предложение 5, которое из постулатов I, II, III не вытекает, но с присоединением постулатов IV (даже одного только архимедова постулата) мы это предложение получаем и при помощи постулатов конгруэнтности III. Постулаты конгруэнтности установлены Гильбертом; постулатам движения отдает предпочтение Веблен (см. [107]).

§ 90. ГЕОМЕТРИЯ ДВУСТОРОННЕЙ ПРЯМОЙ

1. Группа движений и отражений прямой в себе. Как постулаты конгруэнтности, так и постулаты движения были отнесены в нашем построении к ориентированной прямой. Это значит, что конгруэнтными в этой системе могли быть только отрезки, обращенные в одну сторону — в сторону обращения ориентированной прямой. С точки зрения Эрлангенской программы это значит, что рассматривается прямая с группой движений, выражаемой уравнением

$$x' = x + a. \quad (1)$$

С точки зрения наглядной это означает, что допускаются лишь скольжения прямой по самой себе, как это соответствует внутренней геометрии прямой. Если к этому присоединить так называемое отражение прямой от начала, выражаемое уравнением

$$x' = -x, \quad (2)$$

то вместе с группой (1) это приведет к более широкой группе

$$x' = \pm x + a \quad (1a)$$

движений и отражений. Геометрия, соответствующая этой группе, называется геометрией двусторонней прямой.

Отражение есть такое отображение прямой на самой себе, которое на модели, обычно воспроизводящей геометрию прямой, внутренним движением осуществлено быть не может, но абстрактно, по схеме

Клейна, это есть отображение, которое может быть включено в группу изоморфизмов, определяющих геометрию.

С. Ли отмечает во всей своей теории существенный признак, отличающий группу (1а) от группы (1). Группу типа (1) Ли называет непрерывной группой, разумея под этим следующее. В случае группы (1) можно от одного преобразования, соответствующего значению параметра $a = a_0$, перейти к любому другому, соответствующему значению параметра $a = a_1$, непрерывно изменяя значение параметра. Если разность $a_1 - a_0$ разделим на n и через ε обозначим n -ю часть этой разности, т. е. положим

$$\varepsilon = \frac{a_1 - a_0}{n} \quad (3)$$

и возьмем ряд преобразований

$$x' = x + a_0, \quad x'' = x' + \varepsilon, \quad x''' = x'' + \varepsilon \text{ и т. д.}, \quad (4)$$

то, соединяя n таких последовательных преобразований, придем к преобразованию

$$\bar{x} = x + a_1.$$

Особенно выделяется тот случай, когда a_0 есть начальное значение параметра, т. е. то его значение, при котором преобразование становится тождественным; в нашем случае это $a_0 = 0$. Преобразование, соответствующее значению параметра $b = a_1$, получается путем составления сколь угодно малых преобразований. Преобразование (2) не может быть получено этим путем из тождественного преобразования $x' = x$. Преобразования

$$x = \pm x + a$$

по терминологии С. Ли образуют группу, но не непрерывную. В геометрии ориентированной прямой движения образуют непрерывную группу преобразований, в геометрии двусторонней прямой они также образуют группу, но не непрерывную¹⁾.

2. Аксиоматика двусторонней прямой и ее ближайшие следствия.

Переход от геометрии ориентированной прямой к геометрии двусторонней прямой естественно требует некоторого изменения аксиоматики. Дело сводится, однако, только к тому, что термин «ориентированная» при слове «прямая» опускается и вводится постулат, заменяющий III₆.

III₆'. Отрезок AB конгруэнтен обращенному отрезку BA .

Требование же, которое содержалось в прежнем постулате III₆, теперь покрывается следующей теоремой:

Теорема 1. Каковы бы ни были отрезок AB прямой и точка A на ней, на каждом из лучей OC и OC' , выходящих из точки O (и следовательно, составляющих продолжения друг друга), существует такая точка — соответственно C или C' , что $OC \equiv OC' \equiv AB$.

В самом деле, если отрезок AB обращен в сторону луча OC , то на этом луче существует такая точка C , что $OC \equiv AB$ (в силу постулата III₅). Луч OC' , составляющий продолжение луча OC , обращен в сторону отрезка BA . Следовательно, на нем существует такая точка C' , что

¹⁾ Теперь часто такие группы называют связными и несвязными.

$OC' \equiv BA$ (в силу того же постулата III_5), а так как теперь $BA \equiv AB$, то $OC' \equiv AB$.

Введение нового постулата III_6 , значительно упрощает некоторые выводы и, что важнее всего, дает возможность непосредственно на основе постулатов I — III доказать некоторые теоремы, доказательство которых на односторонней прямой становилось возможным только по введении аксиомы Архимеда. Приводя такие теоремы, мы в их формулировке термином «двусторонняя» подчеркиваем, что речь идет о прямой, на которой установлен постулат III_6 .

Теорема 2. На двусторонней прямой сумма двух отрезков не зависит от порядка слагаемых.

Действительно, так как на двусторонней прямой $AB \equiv BA$, $BC \equiv CB$, то $AB + BC \equiv AC \equiv CA \equiv CB + BA \equiv BC + AB$.

Эта теорема имеет основное значение, ее получение составляет главную трудность в построении геометрии ориентированной прямой. Прежде всего упрощается доказательство теоремы 1 § 87, которая теперь не нуждается в постулате Архимеда.

Теорема 3. На двусторонней прямой отрезок больше любого отрезка, составляющего его часть.

В самом деле, если точка C лежит между точками A и B , $AC < AB$ в силу критериев сравнения; иначе говоря, сумма $AC + CB$ всегда больше первого слагаемого; а так как на двусторонней прямой сумма не зависит от порядка слагаемых, то $BC < AB$. Отсюда уже легко вывести теорему в общем ее виде.

Дальнейшее развитие метрики по введении постулата Архимеда происходит совершенно так же, как в § 87.

Читателя это не затруднит: основной вывод заключается в том, что отрезки AB и BA имеют то же отношение к любому третьему отрезку, а потому при любом выборе единицы длины имеют ту же длину. Это дает возможность говорить о расстоянии между двумя точками независимо от их порядка. Упрощение, которое вносит переход к геометрии двусторонней прямой, вызывает вопрос, целесообразно ли вообще развешивать предварительно геометрию ориентированной прямой? Это не только целесообразно, но даже необходимо, чтобы выяснить отличие движений от отражений — конгруэнтности от симметрии — во всем дальнейшем развитии геометрии.

3. Обзор геометрии прямой. Построение метрической геометрии прямой закончено. Сделаем краткий обзор установленных понятий и выводов.

Отправным объектом теории служит некоторое множество L , элементы которого мы называем точками. Самое множество мы называем прямой, имея в виду те соотношения между его элементами-точками, которые на нем устанавливаются: в зависимости от характера этих соотношений говорят о прямой проективной, аффинной, метрической и т. п.

Мы занимались здесь метрической геометрией прямой; однако первые соотношения, которые мы устанавливали, не относятся к числу тех, которые можно считать характерными для метрической прямой.

Основное из этих соотношений присваивается трем различным точкам множества, взятым в определенном порядке; оно именуется словом «между» — точнее, словами «точка B лежит между точками A и C » — и символически обозначается через ABC . Это соотношение характеризуется постулатами порядка. Эти постулаты, как и во всякой аксиоматике.

можно видоизменить¹⁾. Но, по существу, это—а к с и о м а т и к а у п о р я д о ч е н н о г о м н о ж е с т в а. Точнее, это—одна из разновидностей аксиоматики упорядоченного множества, очень удобная в геометрии, целесообразно приспособленная к дальнейшему развитию геометрических понятий и соотношений. Однако структура прямой постулатами порядка отнюдь не определяется; можно указать множество, состоящее только из четырех точек, в котором выполняются все постулаты группы I (см. [94]). Полностью структура прямой определяется только совокупностью постулатов I—IV; но основные черты этой структуры устанавливаются уже постулатами второй группы, которые поэтому называют постулатами существования или структуры.

Совокупностью постулатов I—II прямая характеризуется как открытое линейное множество с бесконечным числом точек в каждом отрезке и, следовательно, в окрестности каждой точки O , т. е. в каждом отрезке, содержащем точку O . Постулаты этих групп дают возможность сравнивать сонаправленные отрезки, выходящие из общей точки.

Следующая третья группа постулатов вводит уже строго метрическое понятие конгруэнтности. Постулаты конгруэнтности дают возможность сравнивать любые сонаправленные отрезки. Удовлетворяя этим постулатам, прямая становится уже однородной: около каждой точки O расположение остальных точек такое же, как относительно каждой другой точки O' . Постулаты конгруэнтности претворяют совокупность сонаправленных отрезков в величину, создают базу для введения метрики, но не дают еще возможности ее осуществить; это достигается только введением постулата Архимеда. На архимедовой прямой всякие два отрезка имеют отношение, а это приводит к однозначному измерению отрезков при выборе единицы длины. На архимедовой прямой можно установить координацию, каждая точка получает абсциссу, прямая становится изоморфной некоторому всюду плотному множеству действительных чисел.

Введение постулата Кантора или равносильного ему постулата превращает прямую в непрерывное линейное множество. Все прямые, удовлетворяющие постулатам I—IV, изоморфны между собой.

К тем же результатам, которые достигаются установлением постулатов конгруэнтности, приводит несколько модифицированная схема, в которой конгруэнтность отрезков устанавливается движением (постулаты конгруэнтности заменены постулатами движения).

Мы уже указывали выше, что прямую, определяемую постулатами I—IV, не следует представлять себе непременно в виде вытянутой нити или светового луча. Ее интерпретациями могут служить другие изоморфные образы. Мы будем называть прямую, определяемую установленными выше постулатами I—IV, декартовой прямой, руководствуясь тем, что длина отрезка (или расстояние между его крайними точками) выражается разностью их абсцисс, как в аналитической геометрии Декарта. Декартову прямую представляет и евклидова прямая, т. е. прямая с той внутренней ее геометрией, которую мы находим в «Началах» Евклида.

¹⁾ Гётингтон в мемуаре [94] приводит 11 различных систем независимых постулатов, каждая из которых приводит к тем же окончательным результатам. Принятие в тексте постулаты расположения совпадают с 8-й схемой Гётингтона. Этот автор вводит еще только одну дополнительную аксиому, устанавливающую, что расположение ABC предполагает, что три точки A, B, C различные.

ДОПОЛНЕНИЯ

В. А. РОЗЕНФЕЛЬД

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ПЛОСКОСТЬ КАК СФЕРА МНИМОГО РАДИУСА

Читатель I части «Оснований геометрии» В. Ф. Кагана несомненно обратил внимание на слова одного из ближайших предшественников Лобачевского Иоганна-Генриха Ламберта, который в своей «Теории параллельных линий» [108], обнаружив, что в случае «третьей гипотезы» (гипотеза острого угла) сумма Σ углов треугольника меньше π и площадь треугольника пропорциональна угловому дефекту $\pi - \Sigma$, и зная, что на обычной сфере, где сумма Σ углов сферического треугольника больше π и площадь сферического треугольника равна произведению углового избытка $\Sigma - \pi$ на квадрат радиуса сферы, выполняет «вторая гипотеза» (гипотеза тупого угла), воскликнул:

«Мне кажется очень замечательным, что вторая гипотеза оправдывается, если вместо плоских треугольников возьмем сферические. Я из этого почти должен был бы сделать заключение, что третья гипотеза имеет место на какой-то мнимой сфере».

К этой мысли Ламберта В. Ф. Каган возвращается в VII главе (ч. I, стр. 296), где показывается, что

«уравнения гиперболической геометрии получаются из уравнений сферической тригонометрии, если радиус сферы r заменить через ki . Далее В. Ф. Каган пишет: «Гиперболическая плоскость формально может быть рассматриваема как сфера мнимого радиуса; формально — в том смысле, что одни формулы переходят в другие заменой действительного радиуса мнимым. В неотчетливой форме эту мысль высказал уже Ламберт (следует ссылка на приведенное место из Ламберта). Лобачевский дал ей точное выражение. И именно то обстоятельство, что уравнения созданной им «Воображаемой геометрии» получаются из уравнений сферической геометрии заменой действительного параметра (r) мнимым (ki), приводит Лобачевского к убеждению, что уравнения новой геометрии не содержат противоречия, что нет противоречия в созданной им геометрии (см. «О началах геометрии» [109], т. I, стр. 260, заключение)».

В книге автора этих строк «Неевклидовы геометрии» [110], вышедшей за время между выходом из печати I части «Оснований геометрии» и окончанием подготовки к печати настоящей (второй) части, в основу изложения гиперболической геометрии положена именно интерпретация этой геометрии как геометрии на сфере мнимого радиуса. По существу

эта интерпретация в виде интерпретации гиперболической геометрии на гиперboloиде была предложена Пуанкаре [¹¹¹] (см. также [⁷⁰]). Эта интерпретация тесно связана с известными интерпретациями Клейна и Пуанкаре гиперболической плоскости внутри окружности (см. выше, гл. XIII и XVIII). Ниже дается краткое изложение этой интерпретации гиперболической плоскости и ее связей с интерпретациями Клейна и Пуанкаре.

1. Псевдоевклидово пространство. В обычном евклидовом пространстве расстояние между любыми двумя точками действительно, вследствие чего сферы мнимого радиуса в этом пространстве невозможны. Положение изменится, если мы изменим мероопределение пространства таким образом, что за расстояние между точками (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) будем считать не число

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

которое всегда действительно, а число

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2},$$

которое в одних случаях действительно, в других мнимо, а в третьих равно нулю (в случае мнимого корня берется значение корня из верхней половины мнимой оси). Определенное таким образом пространство называется евклидовым пространством со знаконеопределенной метрикой или псевдоевклидовым пространством. В псевдоевклидовом пространстве, так же как евклидовом пространстве, можно определить векторы, причём аффинные операции над векторами (сложение и умножение на действительное число) в псевдоевклидовом пространстве ничем не отличаются от таких же операций в евклидовом пространстве, а скалярное произведение векторов $\mathbf{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\mathbf{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$ определяется по формуле¹⁾

$$\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 - z_1 z_2.$$

Поэтому в псевдоевклидовом пространстве расстояние между точками с радиусами-векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, так же как в евклидовом пространстве, является квадратным корнем из скалярного квадрата вектора $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Угол φ между векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ псевдоевклидова пространства определяется таким же соотношением:

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2}{\sqrt{\mathbf{r}_1^2} \sqrt{\mathbf{r}_2^2}},$$

что и в евклидовом пространстве, причем из двух значений φ , $-\varphi$, удо-

¹⁾ Псевдоевклидово пространство может быть, так же как евклидово пространство, определено с помощью системы аксиом. Простейшая система аксиом трехмерного псевдоевклидова пространства может быть получена из аксиоматики трехмерного аффинного пространства (см. П. К. Рашевский [⁶⁵], стр. 82—89), $n=3$, к которой прибавлены следующие аксиомы:

11°. Каждым двум векторам x, y поставлено в соответствие определенное число xy , называемое скалярным произведением.

12°. $xy = yx$.

13°. $x(y+z) = xy + xz$.

14°. $x(ky) = k(xy)$.

15°. Существует репер i, j, k , для которого

$$i^2 = j^2 = 1, k^2 = -1, ij = ik = jk = 0.$$

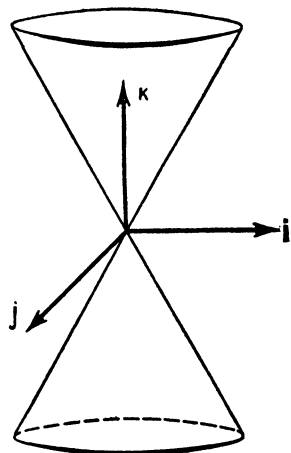
(Трехмерное евклидово пространство может быть определено с помощью аналогичной системы аксиом, в которой аксиома 15° заменена аксиомой: $x^2 \geq 0$, причем при $x \neq 0$ $x^2 > 0$.)

влетворяющих этому соотношению в том случае, когда эти значения комплексны, берется значение из верхней половины мнимой оси или из правой половины плоскости комплексного переменного. Векторы r_1 , r_2 , для которых $r_1 r_2 = 0$, называются ортогональными.

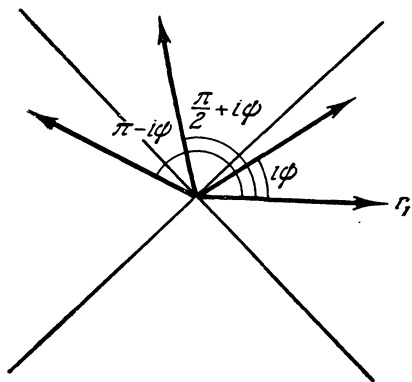
В псевдоевклидовом пространстве во всяком репере, состоящем из трех взаимно ортогональных векторов, два вектора имеют вещественную длину, а один — мнимую длину. В частности, из трех базисных векторов принимаемой нами системы координат (черт. 118) длина векторов i и j равна 1, а длина вектора k равна мнимой единице i .

В псевдоевклидовом пространстве имеются прямые линии трех видов: евклидовы прямые, на которых все векторы имеют действительную длину, псевдоевклидовы прямые, на которых все векторы имеют мнимую длину, и изотропные прямые, на которых все векторы имеют нулевую длину. Примером евклидовой прямой является прямая вектора i , примером псевдоевклидовой прямой является прямая вектора k , примером изотропной прямой является прямая вектора $i + k$.

В псевдоевклидовом пространстве имеются плоскости трех видов: евклидовы плоскости, на которых всякие два ортогональных вектора имеют действительную длину, псевдоевклидовы плоскости, на которых из двух ортогональных векторов один имеет действительную, а другой — мнимую длину, и полуевклидовы плоскости, на которых из двух ортогональных векторов один имеет действительную, а другой — нулевую длину. Примером евклидовой плоскости является плоскость векторов i, j , примером псевдоевклидовой плоскости является плоскость векторов i, k , примером полуевклидовой плоскости является плоскость векторов $i, j + k$. Все изотропные прямые псевдоевклидова пространства, проходящие через одну его точку, составляют конус, называемый изотропным конусом этой точки. На псевдоевкли-



Черт. 118.



Черт. 119.

довой плоскости через каждую точку проходят две изотропные прямые, на полуевклидовой плоскости — одна изотропная прямая.

Для псевдоевклидовой плоскости, так же как для евклидовой плоскости, можно доказать формулу Лагерра, в силу которой угол между двумя прямыми p_1 , p_2 связан с двойным отношением $W(p_1, p_2; j_1, j_2)$ этих прямых и двух изотропных прямых j_1 , j_2 , проходящих через точку их пересечения, соотношением

$$\varphi = \frac{i}{2} \ln W(p_1, p_2; j_1, j_2).$$

Угол между двумя неизотропными векторами псевдоевклидовой плоскости, лежащими в одном из четырех углов, на которые эта плоскость делится двумя изотропными прямыми (черт. 119), проходящими через их общее начало, является мнимым числом $i\psi$ (при $\psi = 0$ векторы коллинеарны), угол между двумя неизотропными векторами, лежащими в двух смежных из этих четырех углов, является комплексным числом вида $\frac{\pi}{2} + i\psi$ (при $\psi = 0$ векторы ортогональны); угол между двумя неизотропными векторами, лежащими в двух вертикальных из этих четы-

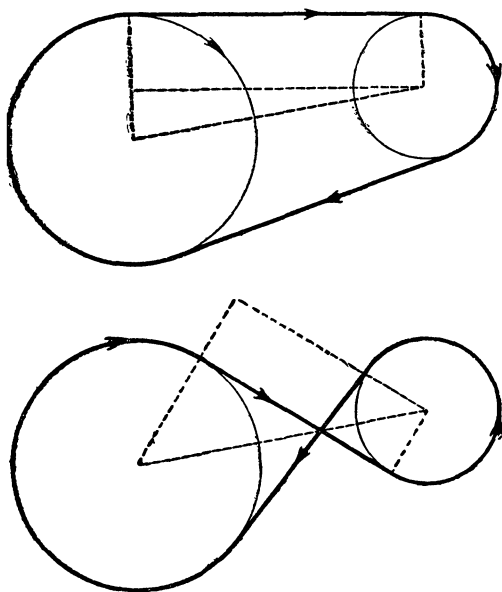
рех углов, является комплексным числом вида $\pi - i\psi$ (при $\psi = 0$ векторы коллинеарны). Угол между двумя неизотропными векторами полуевклидовой плоскости, лежащими по одну сторону от изотропной прямой, проходящей через их общее начало, равен 0, угол между двумя неизотропными векторами, лежащими по разные стороны от этой прямой, равен π .

Псевдоевклидово пространство допускает простую модель на евклидовой плоскости: точки псевдоевклидова пространства изображаются ориентированными окружностями евклидовой плоскости.

Будем определять эти окружности координатами x , y центра и радиусом r со знаком «плюс» в случае положительной ориентации и знаком «минус» в случае отрицательной ориентации (черт. 120). Будем называть

касательным расстоянием между двумя ориентированными окружностями длину отрезка общей касательной этих окружностей между точками касания, если ориентации окружностей индуцируют на этой общей касательной одинаковую ориентацию. Нетрудно проверить, что в том случае, когда две ориентированные окружности (x_1, y_1, r_1) и (x_2, y_2, r_2) обладают общей касательной указанного вида, их касательное расстояние в точности равно расстоянию между точками (x_1, y_1, r_1) и (x_2, y_2, r_2) псевдоевклидова пространства. В том случае, если две ориентированные окружности не имеют общей касательной, им приписывается мнимое касательное расстояние, выражающееся через координаты центров и радиусы окружностей по той же формуле. Существование указанной модели доказывает непротиворечивость псевдоевклидова пространства.

Четырехмерный аналог определенного нами псевдоевклидова пространства (пространство Минковского) используется в специальной теории относительности для геометрической интерпретации пространства и времени и играет исключительно важную роль в теоретической физике.



Черт. 120.

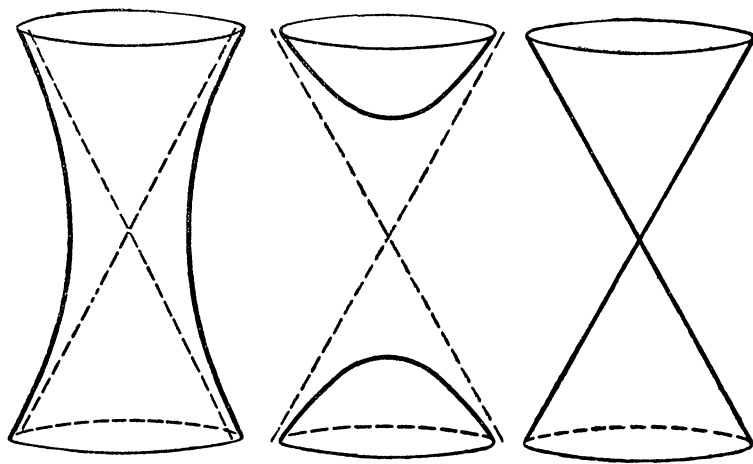
2. Сфера мнимого радиуса. В псевдоевклидовом пространстве имеется три вида сфер (геометрических мест точек, равноотстоящих от одной точки): сферы действительного радиуса, сферы мнимого радиуса и сферы нулевого радиуса. Сферы вещественного радиуса

$$x^2 + y^2 - z^2 = r^2$$

имеют вид однополостного гиперболоида (черт. 121); касательные плоскости к ним псевдоевклидовы, вследствие чего в малом на этих сферах имеет место псевдоевклидова геометрия. Сферы мнимого радиуса

$$x^2 + y^2 - z^2 = -q^2$$

имеют вид двуполостного гиперболоида (черт. 121); касательные плоскости к ним евклидовы, вследствие чего в малом на этих сферах имеет



Черт. 121.

место евклидова геометрия. Сферы нулевого радиуса совпадают с изотропными конусами (черт. 121); касательные плоскости к ним псевдоевклидовы.

Каждая из полостей сферы мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве изометрична гиперболической плоскости в целом. Для доказательства достаточно проверить, что на этой полости выполняются все аксиомы гиперболической плоскости; при этом следует иметь в виду, что прямые гиперболической плоскости изображаются на сфере мнимого радиуса «большими окружностями» — сечениями плоскостями, проходящими через центр сферы.

Заметим, что пересекающиеся прямые гиперболической плоскости изображаются на сфере мнимого радиуса сечениями плоскостями, пересекающимися по псевдоевклидовой прямой, расходящиеся прямые — сечениями плоскостями, пересекающимися на евклидовой прямой, параллельные прямые — сечениями плоскостями, пересекающимися на изотропной прямой; при этом угол между пересекающимися прямыми гиперболической плоскости равен углу между соответственными плоскостями. Переходя к пределу при стремлении линии пересечения этих

плоскостей к изотропной прямой, мы получаем, что угол между двумя параллельными прямыми равен нулю.

Расстояние между двумя точками сферы мнимого радиуса ki с радиусами-векторами (из центра сферы) $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ определяется по формуле

$$\cos \frac{\omega}{ki} = \frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2}{\sqrt{r_1^2} \sqrt{r_2^2}},$$

что можно переписать в виде:

$$\operatorname{ch} \frac{\omega}{k} = \frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2}{-k^2}.$$

Интерпретация гиперболической плоскости в виде мнимой сферы позволяет исключительно просто вывести все формулы гиперболической тригонометрии¹⁾. В самом деле, если нам дан на мнимой сфере

треугольник ABC (черт. 122) сторонами a, b, c и радиусами-векторами вершин (из центра сферы) A, B, C , то

$$\operatorname{ch} \frac{a}{k} = \frac{BC}{-k^2}, \quad \operatorname{ch} \frac{b}{k} = \frac{CA}{-k^2},$$

$$\operatorname{ch} \frac{c}{k} = \frac{AB}{-k^2}.$$

Если мы обозначим радиусы-векторы точек пересечения линий векторов B и C с касательной плоскостью к сфере в вершине A через λB и μC , то угол A равен углу между векторами $\lambda B - A$ и $\mu C - A$, касательными к дугам AB и AC . Так как векторы $\lambda B - A$ и $\mu C - A$ перпендикулярны к

вектору A , т. е. $(\lambda B - A) A = (\mu C - A) A = 0$, то числа λ и μ соответственно равны

$$\lambda = \frac{-k^2}{AB} = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{c}{k}}, \quad \mu = \frac{-k^2}{AC} = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{b}{k}}.$$

Угол A определится из соотношения

$$\cos A = \frac{(\lambda B - A) (\mu C - A)}{\sqrt{(\lambda B - A)^2} \sqrt{(\mu C - A)^2}},$$

откуда, используя то, что $\lambda = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{c}{k}}$, $\mu = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{b}{k}}$, мы легко получим теорему косинусов

$$\operatorname{ch} \frac{a}{k} = \operatorname{ch} \frac{b}{k} \operatorname{ch} \frac{c}{k} + \operatorname{sh} \frac{a}{k} \operatorname{sh} \frac{b}{k} \cos A.$$

¹⁾ Другой способ вывода формул сферической геометрии с помощью векторов см. в книге Я. С. Дубнова [112].

Из этой формулы и ее аналогов для углов B и C мы легко получим теорему синусов

$$\frac{\sin A}{\operatorname{sh} \frac{a}{k}} = \frac{\sin B}{\operatorname{sh} \frac{b}{k}} = \frac{\sin C}{\operatorname{sh} \frac{c}{k}}$$

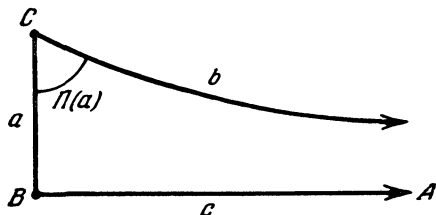
и двойственную теорему косинусов

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \operatorname{ch} \frac{a}{k}.$$

Из этих формул нетрудно получить также тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике.

Записывая двойственную теорему косинусов для треугольника с бесконечно удаленной вершиной A (угол $A=0$) и с прямым углом B и имея в виду, что в этом случае $C = \Pi(a)$ (черт. 123), мы получаем соотношение

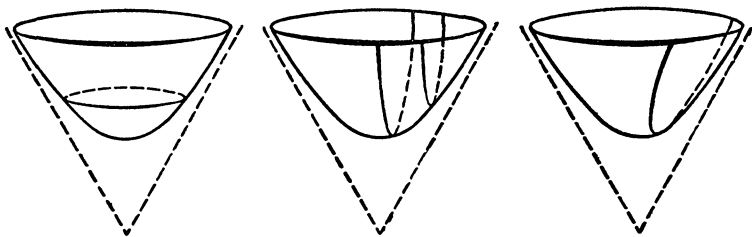
$$\sin \Pi(a) = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{c}{k}},$$



Черт. 123.

откуда легко находится явное выражение функции $\Pi(x)$.

Заметим, что окружности гиперболической плоскости изображаются сечениями сферы мнимого радиуса евклидовыми плоскостями (черт. 124), эквидистанты — сечениями псевдоевклидовыми плоскостями (черт. 124) (прямая, изображаемая сечением параллельной плоскостью, проходящей через центр сферы, — база эквидистанты),

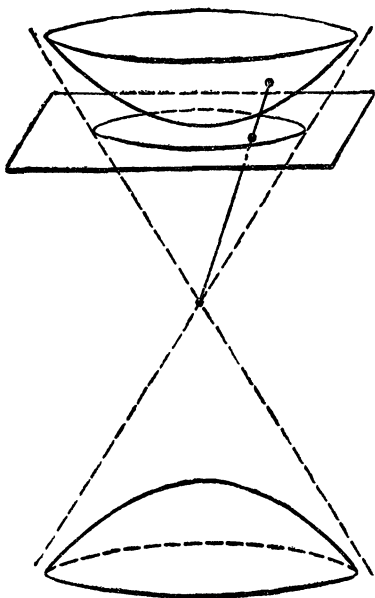


Черт. 124.

оридиклы — сечениями полуевклидовыми плоскостями (черт. 124). Движения гиперболической плоскости изображаются вращениями сферы мнимого радиуса. Вместо того чтобы рассматривать одну полость сферы мнимого радиуса, можно рассматривать эту сферу с диаметрально противоположными точками. Эта интерпретация является полным аналогом известной интерпретации эллиптической плоскости в виде сферы в евклидовом пространстве.

3. Связь с интерпретациями Клейна и Пуанкаре. Для получения из изложенной нами интерпретации интерпретации Клейна достаточно спроектировать верхнюю полость нашей сферы мнимого радиуса из центра сферы на касательную плоскость к сфере в «северном полюсе» (черт. 125). Очевидно, что при этой проекции верхняя полость сферы

спроектируется в виде внутренности круга, окружность которого является пересечением изотропного конуса центра сферы с касательной плоскостью, а большие окружности сферы спроектируются в виде прямолинейных хорд этого круга. Вращения сферы мнимого радиуса являются аффинными преобразованиями, переводящими в себя изотропный конус центра сферы, а эти преобразования индуцируют на плоскости проекции проективные преобразования, переводящие в себя окружность пересечения изотропного конуса с плоскостью проекции. Поэтому движения гиперболической плоскости изображаются на плоскости проекции проективными преобразованиями, переводящими в себя указанную окружность. Далее, двойное отношение радиусов-векторов двух точек сферы мнимого радиуса и двух изотропных прямых, проходящих через центр сферы в их плоскости, равно двойному отношению четырех точек пересечения этих прямых с плоскостью проекции. Расстояние ω между двумя точками сферы мнимого радиуса связано с углом φ между их радиусами-векторами соотношением $\omega i = \varphi k$. Мы получаем, таким образом, что расстояние ω между двумя точками гиперболической плоскости, изображаемыми точками P_1, P_2 в интерпретации Клейна, связано с двойным отношением $W(P_1, P_2; J_1, J_2)$ этих точек и точек J_1, J_2 пересечения прямой P_1P_2



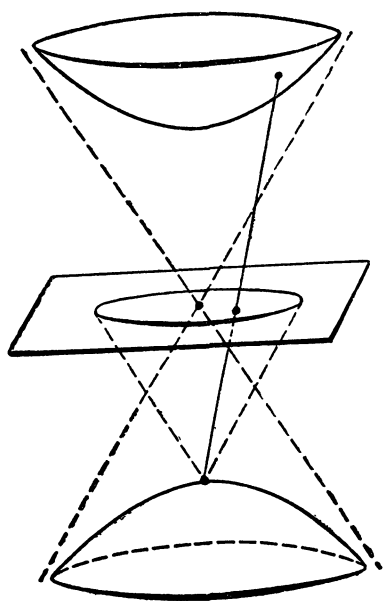
Черт. 125.

с указанной окружностью; при этом $\omega = \frac{k}{2} \ln W(P_1, P_2; J_1, J_2)$.

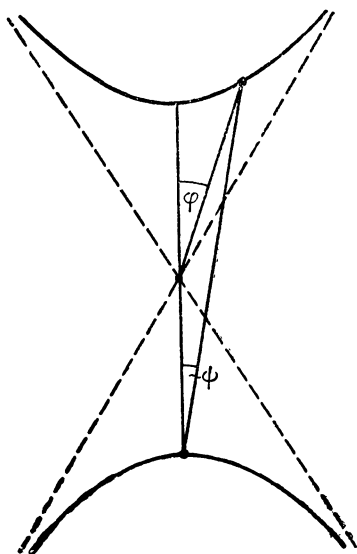
Для получения интерпретации Пуанкаре достаточно спроектировать верхнюю полость нашей сферы мнимого радиуса из «южного полюса» сферы на «экваториальную плоскость» (черт. 126). Очевидно, что при этой проекции верхняя полость сферы также спроектируется в виде внутренности круга, окружность которого является пересечением изотропного конуса южного полюса сферы с экваториальной плоскостью. Эта проекция является аналогом известной стереографической проекции сферы в евклидовом пространстве из полюса сферы на ее экваториальную плоскость. Так же как для обычной стереографической проекции, показывается, что при этой проекции углы между кривыми на сфере равны углам между соответственными кривыми на плоскости и окружности на сфере изображаются окружностями и прямыми на плоскости, в частности, большие окружности на сфере — окружностями и прямыми, ортогональными к окружности пересечения изотропного конуса с плоскостью проекции. Окружности и прямые, обладающие указанным свойством, изображают прямые гиперболической плоскости.

Так как вращения сферы мнимого радиуса переводят окружности в окружности, то, если рассматривать плоскость проекции как плоскость комплексного переменного, вращения сферы изображаются на этой плоскости дробно-линейными преобразованиями, переводящими в себя окружность с пересечения изотропного конуса с плоскостью проекции.

Поэтому движения гиперболической плоскости изображаются на плоскости проекций, рассматриваемой как плоскость комплексного пере-



Черт. 126.



Черт. 127.

менного, дробно-линейными преобразованиями, переводящими в себя окружность s .

Так как угол ψ между прямыми, соединяющими южный полюс с северным полюсом и с произвольной точкой верхней полости сферы мнимого радиуса, является вписанным углом, опирающимся на ту же дугу, что и центральный угол φ (черт. 127), связанный с расстоянием между указанными точками соотношением $\omega i = \varphi k$, то угол ψ равен половине угла φ и поэтому связан с расстоянием ω соотношением $\omega i = 2\psi k$. Мы получаем, что расстояние ω между двумя точками гиперболической плоскости, изображаемыми точками P_1, P_2 в интерпретации Пуанкаре, одна из которых является центром указанного круга s , связано с двойным отношением $W(P_1, P_2; J_1, J_2)$ этих точек и точек J_1, J_2 пересечения их прямой с окружностью круга s соотношением $\omega = k \ln W(P_1, P_2; J_1, J_2)$.

Двойное отношение четырех точек плоскости комплексного переменного не изменяется при дробно-линейных преобразованиях. Прямая, проходящая через центр круга при дробно-линейных преобразованиях, переводящих в себя окружность s , переходит в окружность, ортогональную окружности s . Мы получаем, что расстояние ω между двумя точками гиперболической плоскости, изображаемыми в интерпретации Пуанкаре двумя произвольными точками P_1, P_2 , связано тем же соотношением с двойным отношением $W(P_1, P_2; J_1, J_2)$ этих точек и точек J_1, J_2 пересечения проходящей через них окружности, ортогональной к окружности s , с этой последней окружностью.

Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

НОВЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРЕДИСТОРИИ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

За время между выходом из печати I части «Оснований геометрии» В. Ф. Кагана и окончанием подготовки к печати настоящей части были опубликованы исследования по предистории неевклидовой геометрии, проливающие некоторый свет на историю теории параллельных линий в древности и средние века.

В 1949 г. вышла книга неоднократно упоминавшегося в I части «Оснований» Т. Хиса, посвященная разбору всех математических высказываний Аристотеля [113]. В 1952 г. вышел русский перевод обеих «Аналитик» Аристотеля [114] с подробными комментариями. В 1953 г. был опубликован русский перевод геометрического трактата известного средневекового ученого и поэта Омара Хайяма [115], до того времени не переведенный ни на один европейский язык¹⁾; трактат Хайяма содержит изложение теории параллельных линий самого Хайяма, а также ряд ценных указаний на развитие этой теории у предшественников Хайяма. За это же время опубликовано несколько работ [116], [117], в которых изучается теория параллельных линий у упоминавшегося в I части «Оснований» Насир-эддина ат-Туси.

Поэтому к тому изложению предистории неевклидовой геометрии, которое было предложено читателю во II главе I части «Оснований», в настоящее время могут быть сделаны следующие дополнения.

1. Аристотель о теории параллельных линий. Во II главе «Оснований» (ч. I, стр. 112) было указано, что Аристотель приводил некоторые рассуждения о параллельных линиях во «Второй аналитике» (кн. I, гл. 5, стр. 190 русского издания) и в «Первой аналитике» (кн. II, гл. 17, стр. 159). Гораздо более важным является неотмеченное в I части «Оснований» высказывание Аристотеля в «Первой аналитике» (кн. II, гл. 16, стр. 155):

«Так поступают (например) те, кто думает описать²⁾ параллельные линии. В самом деле, они, сами того не зная (в основу доказательства), берут то, что (само) не может быть доказано, если (линии) не параллельны».

Глава 16 кн. II «Первой аналитики», откуда взят этот отрывок, посвящена известной логической ошибке «постулирования основания» («*petitio principii*»), т. е. неявному использованию утверждения, равносильного

¹⁾ К трактату приложены комментарии Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича (стр. 143—168).

²⁾ В русском тексте «Аналитика» соответственное греческое слово *γραφειν* «описать» и «провести» переведено вторым значением. О толковании этого места у Аристотеля см. Хис [113], стр. 28.

доказываемому. Мы знаем, что именно эта логическая ошибка совершалась всеми авторами попыток доказательств V постулата. Слова Аристотеля показывают, что изложение теории параллельных линий производилось уже во времена Аристотеля и что ему было ясно, что при этом изложении необходимо открыто постулировать какое-нибудь утверждение, эквивалентное V постулату Евклида.

Одно из приписываемых Аристотелю утверждений, эквивалентных V постулату Евклида, возможно, содержащееся в одном из недошедших до нас сочинений Аристотеля, приведено в указанном выше трактате Омара Хайяма. Хайям говорит, что причина ошибки ученых в вопросе о V постулате

«состоит в том, что они не учитывали принципов, заимствованных у философа, и не оспаривали количества (утверждений), приведенных Евклидом в начале первой книги, в то время как это утверждение недостаточно и имеется много необходимых утверждений, которые должны предшествовать (изложению) геометрии.

Например, среди них: величины можно делить до бесконечности, т. е. они не состоят из неделимых. Это философское утверждение необходимо геометру для его искусства. Не следует думать, что в нем имеется порочный круг. Поскольку философ принял круг и прямую линию и другие принципы геометрии, он может привести для этого «доказательство того, что это так», но не доказательство того, «почему это так». Поэтому, по существу, это утверждение должно быть предпосылкой геометрии, а не ее составной частью.

И среди них: прямую линию можно продолжать до бесконечности. Но хотя философ доказывает, что все тела ограничены и вне их нет ни пустоты, ни полноты, он в то же время указывает обстоятельства, когда геометр имеет право сказать: это бесконечно или может быть продолжено до бесконечности.

И среди них: всякие две пересекающиеся линии раскрываются и расходятся по мере удаления от (вершины) угла пересечения.

И среди них: две сходящиеся прямые линии пересекаются и невозможно, чтобы две сходящиеся прямые линии расходились в направлении схождения.

Эти последние утверждения можно доказать с помощью «доказательства того, что это так» геометрическим путем, как ты легко сообразишь¹⁾.

Первые два из этих принципов совпадают с высказываниями Аристотеля в его «Физике» [118]:

«Длина и время, как и вообще все непрерывное, называются бесконечными в двояком смысле: или в отношении деления или в отношении границ» (см. [118], кн. VI, гл. 2, стр. 128).

«Невозможно ничему непрерывному состоять из неделимых частей, например, линий из точек, если линия непрерывна, а точка неделима» (см. [118], кн. VI, гл. 1, стр. 124).

Третий из этих принципов совпадает с «аксиомой Аристотеля», высказанной в его сочинении «О небе» (см. В. Ф. Каган, Основания геометрии, ч. I, стр. 117).

«Доказательство того, что это так» и «доказательство того, почему это так» — известные термины аристотелевской логики, которые в русском

¹⁾ Хайям [115], стр. 74—75.

издании «Второй аналитики» переведены словами «доказательство того, что есть данная вещь» и «доказательство того, почему есть данная вещь» ([¹¹⁴], Вторая аналитика, кн. I, гл. 13, стр. 206).

Утверждение о конечности мира и о том, что это не отнимает у математиков их теории бесконечного, высказывалось Аристотелем в «Физике» ([¹¹⁸], кн. III, гл. 7, стр. 67).

Все приведенные нами сопоставления не оставляют сомнения, что под философом здесь Хайям имеет в виду Аристотеля.

Заметим, что под «доказательством того, что это так» Аристотель имеет в виду доказательство, убеждающее в правильности доказываемого, но не выясняющее его причины, главным образом экспериментальное доказательство или доказательство с помощью осуществления доказываемого. Под «доказательством того, почему это так», Аристотель имеет в виду доказательство, убеждающее в правильности доказываемого с помощью выяснения его причины. Аристотель указывает, что доказательство первого рода дают науки, основанные на чувственном восприятии, например физика, а доказательство второго рода дают математические науки ([¹¹⁴], Вторая аналитика, кн. I, гл. 13, стр. 209). Отсюда видно, что в математике истинно научным доказательством Хайям считал только «доказательство того, почему это так».

Слова «поскольку философ принял круг и прямую линию и другие принципы геометрии, он может привести для этого „доказательство того, что это так“», означают, что с помощью циркуля и линейки можно разделить каждый отрезок пополам и производить эту операцию бесконечное множество раз; этим будет дано «доказательство того, что это так», но не будет выяснена причина этого. Причиной же выполнимости этой операции является принципиальная делимость величин до бесконечности.

Второй принцип весьма близок ко II постулату Евклида («ограниченную прямую (можно) непрерывно продолжать по прямой»). Помещая здесь этот принцип, Хайям, очевидно, хотел подчеркнуть, что процесс продолжения прямой может происходить до бесконечности.

Особое значение для теории параллельных линий имеет четвертый принцип. Этот принцип состоит из двух утверждений, каждое из которых эквивалентно V постулату Евклида. Повидимому, Аристотель высказал утверждение, эквивалентное V постулату именно в этой форме.

Заметим, что слова «эти последние утверждения можно доказать с помощью доказательства того, что это так», стоящие во множественном числе, относятся не менее чем к трем утверждениям, повидимому, ко всем утверждениям II, III и IV принципов (в случае двух утверждений в арабском языке стояло бы не множественное, а двойственное число).

2. Теория параллельных линий Омара Хайяма. В I части «Оснований» была отмечена важная роль в истории теории параллельных линий двух ученых средневекового Востока: Абу-л-Фазла ан-Найризи (Анариция)¹⁾ и Насир-эддина ат-Туси.

Вклад ученых средневекового Востока в историю науки трудно переоценить: достаточно указать на одного из основателей научной медицины бухарца Ибн Сину (980—1037) (известен в Западной Европе как Avicenna), основателя алгебры хорезмийца ал-Хорезми (780—847) (известен

¹⁾ Ан-Найризи также известен под именем «ат Табризи», весьма сходным по арабскому написанию с «ан-Найризи» (буквы «н» и «т», а также «й» и «б» отличаются друг от друга только точкой в первом случае над, во втором случае под буквой).

в Западной Европе как *Algorithmus*), выдающегося астронома и математика хорезмийца ал-Бируни (933—1048), выдающегося оптика басрийца ал-Хайсама (965—1030) (известен в Западной Европе как *Alhazen*). Следует отметить, что многие из этих ученых, писавших на арабском языке, игравшем на средневековом Востоке ту же роль международного научного языка, что и латынь в средневековой Европе, принадлежали к предкам восточных народов нашей родины—узбеков (хорезмийцы, ферганцы), таджиков (бухарцы, хорасанцы), азербайджанцев. Важной особенностью этих ученых было то, что все они являлись энциклопедистами, и, в частности, даже те из них, кто прославился как врач или физик, занимались математикой¹⁾.

Омар Хайям (1040—1123) был одним из крупнейших ученых средневекового Востока. Широким кругам читателей Хайям более известен как автор замечательных «Четверостиший», в которых он высмеивает официальную религию ислама и воспекает радости жизни. Хайям родился и умер в Нишапуре (Хорасан), а жил и работал в Самарканде, Мерве, Исфахане и других городах Средней Азии и Ирана. Хайяму принадлежит не дошедший до нас арифметический трактат «Трудности арифметики», где изложен открытый им способ извлечения корней любой степени из целых чисел, алгебраический трактат «О доказательствах задач алгебры и алмукабалы», посвященный решению всех видов кубических уравнений геометрическим способом, и геометрический трактат «Комментарии к трудным постулатам книги Евклида», посвященный теории параллельных линий и теории отношений и расширению понятия о числе. Хайяму же принадлежат календарная реформа, аналогичная нашему «новому стилю», и ряд трактатов по физике, философии, географии, музыке и другим наукам.

Теория параллельных линий Хайяма изложена в первой книге его геометрического трактата. Целью Хайяма является доказательство V постулата Евклида с помощью сформулированного Хайямом четвертого принципа Аристотеля.

В начале Хайям доказывает, что два перпендикуляра к одной прямой не могут пересекаться, так как в этом случае они должны пересекаться в двух точках по обе стороны от этой прямой, а это противоречит аксиоме Евклида «две прямые не содержат пространства», имевшейся в том тексте «Начал», которым пользовался Хайям.

Отсюда и из первого утверждения принципа Аристотеля следует, что два перпендикуляра к одной прямой не могут сходиться, как это имеет место в эллиптической геометрии.

Из второго утверждения принципа Аристотеля следует, что эти два перпендикуляра не могут и расходиться, как это имеет место в гиперболической геометрии, так как они должны были бы расходиться друг от друга по обе стороны от этой прямой. Поэтому два перпендикуляра к одной прямой должны находиться на постоянном расстоянии.

¹⁾ Ибн Синя принадлежит не дошедший до нас геометрический трактат «Сокращенный Евклид» (см. «Жизнеописание Абу Али Хусейна ибн Абдаллаха ибн Сины, рассказанное им самим и записанное его учеником Абу-Убейдом ал-Джузджани», перевод М. И. Занда, альманах «Литературный Таджикистан», кн. 5, Сталинабад, 1953, стр. 131—145), ал-Хайсаму принадлежит много математических трактатов, в числе которых комментари к Евклиду, цитирующиеся Хайямом (см. [113], стр. 70—71).

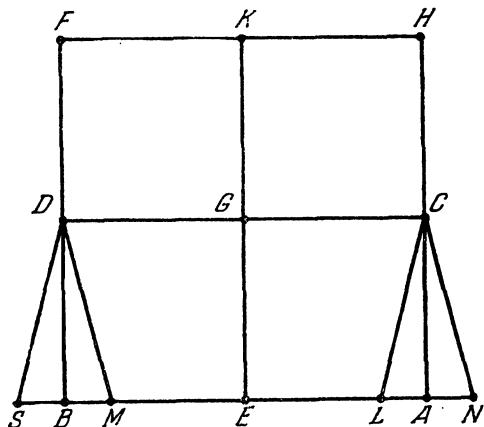
О развитии математики на средневековом Востоке см. А. П. Юшкевич «О математике народов Средней Азии в IX—XV веках», Историко-матем. иссл., вып. IV, М., 1951, стр. 455—488.

Далее Хайям доказывает восемь предложений, которые должны быть, по его мнению, вставлены в первую книгу «Начал» Евклида вместо 29 предложения этой книги. Здесь он строит четырехугольник, образованный двумя перпендикулярами AC и BD равной длины, восставленными к одной прямой AB , и отрезками AB и CD (черт. 128). Это известный в истории неевклидовой геометрии четырехугольник Саккери¹⁾.

В первом предложении Хайям доказывает, что верхние углы «четырехугольника Саккери» равны между собой. Во втором предложении Хайям

доказывает, что перпендикуляр, восставленный в середине нижнего основания «четырехугольника Саккери», перпендикулярен к верхнему основанию этого четырехугольника и делит это верхнее основание пополам.

Особенно важно третье предложение Хайяма, в котором он доказывает, что верхние углы «четырехугольника Саккери» прямые. Для этого рассматривает три гипотезы, состоящие в том, что эти углы являются прямыми, острыми и тупыми. Далее, восставляя в середине E нижнего основания AB «четырехугольника Саккери» перпендикуляр EG , пере-



Черт. 128.

секающий верхнее основание CD в точке G , Хайям продолжает этот перпендикуляр до такой точки K , что $EG = GK$, затем восставляет перпендикуляр к прямой EK в точке K , находит точки H, F его пересечения с продолжениями сторон AC, BD (черт. 128) и показывает, что $CH = DF$, т. е. четырехугольник $ABFH$ также является «четырехугольником Саккери». Далее Хайям говорит:

«Если углы ACD и BDC прямые, наша цель достигнута. Если же они не прямые, то каждый из них или меньше прямого или больше его.

Пусть сначала они меньше прямого. Если мы наложим поверхность CF на поверхность CB , то CK наложится на CE , так же как HF на AB , причем HF будет равна линии NS , так как угол HCG больше угла ACG и линия HF больше AB . Точно так же, если эти две линии продолжать до бесконечности, каждая из соединяющих линий будет больше, чем другая, и так будет до бесконечности. Две линии AC, BD при продолжении в другом направлении также будут расходиться, что доказывается совершенно так же, так как положения по обе стороны при наложении необходимо совпадают: поэтому две прямые линии пересекают под прямыми углами прямую, а затем по обе стороны от этой линии расстояние между ними увеличивается, но это в силу первичного утверждения несовместимо с понятием прямооты, так как между этими линиями имеется определенное расстояние, — этот случай рассматривался философом.

¹⁾ Первым обратил внимание на то, что «четырехугольник Саккери» рассматривался Хайямом, Смит [119].

Пусть теперь каждый из них (углов ACD , BDC) больше прямого. Тогда при наложении линия HF будет равна LM , которая будет меньше AB , так же, как все соединяющие линии, и эти две линии будут сходиться. С другой стороны также будет сходжение, так какположения по обе стороны при наложении совпадают. Если ты немного подумаешь, ты это поймешь. Но это, согласно вышесказанному, опять невозможно» ([115], стр. 77—78).

Мы видим, что в случае гипотез острого и тупого углов Хайям сначала перегибает чертеж по прямой CD и показывает, что при этом отрезок HF совпадает при гипотезе острого угла с отрезком NS , а при гипотезе тупого угла с отрезком LM , т. е. при гипотезе острого угла верхнее основание «четырехугольника Саккери» больше нижнего и его боковые стороны удаляются друг от друга, а при гипотезе тупого угла верхнее основание «четырехугольника Саккери» меньше нижнего и его боковые стороны приближаются друг к другу. Далее, перегибая чертеж по прямой AB , Хайям видит, что при гипотезе острого угла два перпендикуляра к одной прямой расходятся по обе стороны от этой прямой, а при гипотезе тупого угла эти перпендикуляры сходятся по обе стороны от этой прямой, но, как мы видели из принципа Аристотеля, следует, что два перпендикуляра к одной прямой находятся на постоянном расстоянии («этот случай рассматривался философом»). Таким образом как гипотеза острого угла, так и гипотеза тупого угла приведены к противоречию с принципом Аристотеля.

В четвертом предложении Хайям доказывает, что в четырехугольнике с четырьмя прямыми углами, существование которого доказано в предыдущем предложении, противоположные стороны равны. В пятом предложении Хайям доказывает, что два перпендикуляра к одной прямой обладают тем свойством, что любой перпендикуляр к одному из них является их общим перпендикуляром. В шестом предложении Хайям доказывает, что если две прямые параллельны в смысле Евклида, т. е. не пересекаются, они являются двумя перпендикулярами к одной прямой.

В седьмом предложении Хайям доказывает, что если две параллельные прямые пересекаются третьей прямой, накрестлежащие и соответственные углы равны, а внутренние односторонние углы составляют в сумме два прямых. Это предложение совпадает с 29-м предложением первой книги Евклида, но при его доказательстве Хайям опирается не на V постулат Евклида, а на свои предложения.

И, наконец, в восьмом предложении доказывается V постулат Евклида. Это доказательство в точности совпадает с доказательством V постулата Проклом (см. ч. I, стр. 117). Существенная разница между Хайямом и Проклом состоит в том, что Прокл пользовался в своем доказательстве V постулата предложением, эквивалентным V постулату, скрытно, а Хайям выставляет это предложение открыто, в виде принципа Аристотеля.

Заслуги Хайяма в теории параллельных линий состоят в том, что он открыто заменил V постулат более простым и наглядным и тем самым сделал один из первых шагов к доказательству независимости этого постулата от остальных аксиом и постулатов Евклида, и в том, что, рассмотрев «четырехугольник Саккери» при гипотезах острого и тупого угла, Хайям тем самым по существу доказал первые теоремы неевклидовых геометрий, где «четырехугольник Саккери» удовлетворяет этим гипотезам.

3. Теория параллельных линий Насир-эддина ат-Туси. Насир-эддин ат-Туси (1201—1274) был одним из крупнейших астрономов и математиков средневекового Востока. Насир-эддин родился в Тусе (Хорасан) и про-

славился основанной им астрономической обсерваторией в Мараге (Азербайджан). Насир-эддину принадлежит огромное число сочинений по различным областям науки, важнейшими из которых является астрономическое сочинение «Эльханские таблицы», трактат по сферической тригонометрии, «Трактат о полном четырехугольнике» и «Изложение Евклида», представляющее собой перевод «Начал» Евклида с добавлениями Насир-эдина. До нас дошли две редакции «Изложения Евклида»: первая — из 15 книг, вторая — из 13 книг. Во второй редакции текст Евклида подвергся большой переработке. В I части «Оснований» рассматривается стрывок из второй редакции «Изложения Евклида», посвященный теории параллельных линий в переложении Валлиса (см. стр. 119—121). К этому изложению следует добавить, что «лемма III» (правильнее не «лемма», а «предссылка») этого отрывка, не находящая применения в этом изложении, на самом деле используется Насир-эдином в опущенном в этом изложении доказательстве V постулата для того случая, когда один из внутренних односторонних углов, составляющих вместе менее $2d$, тупой.

Изложение теории параллельных линий в первой редакции «Изложения Евклида» существенно отличается от изложения во второй редакции. Прежде всего здесь, приведя во введении к I книге формулировку V постулата Евклида, Насир-эдин пишет:

«Я утверждаю, что последнее утверждение не является аксиомой и может быть разъяснено только в рамках геометрической науки. Об этом лучше говорить не во введении, и я разъясню его в надлежащем месте. Вместо него я ставлю другое утверждение:

Если прямые линии, расположенные в одной плоскости, расходятся в одном направлении, они не могут в этом направлении сходиться, если только они не пересекаются» ([¹²⁰], стр. 4).

В этом постулате нетрудно узнать модификацию принципа Аристотеля, приведенного Хайямом¹⁾.

После 28-го предложения I книги Насир-эдин так же, как Хайям, вставляет вывод V постулата Евклида из предложенного им постулата.

В первом предложении Насир-эдин доказывает, что кратчайшее расстояние от точки до прямой измеряется по перпендикуляру, опущенному из точки на прямую.

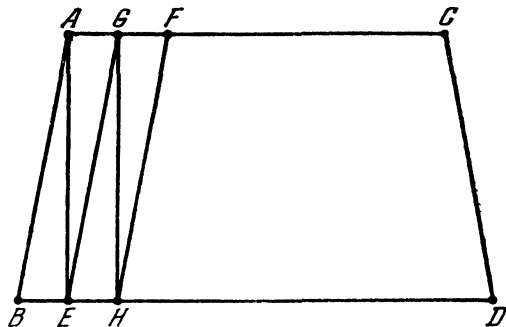
Во втором предложении Насир-эдин доказывает, что если восставить два перпендикуляра равной длины к данной прямой и соединить их концы прямой, то верхние углы полученного четырехугольника равны. Построенный Насир-эдином четырехугольник является тем же «четыреугольником Саккери», что и у Хайяма, а второе предложение Насир-эдина совпадает с первым предложением Хайяма. Совпадают и доказательства этих предложений. А

В третьем предложении Насир-эдин доказывает, что верхние углы построенного им «четыреугольника Саккери» равны. Формулировка этого предложения совпадает с формулировкой третьего предложения Хайяма, но Насир-эдин дает этому предложению оригинальное доказательство.

В случае гипотезы тупого угла (черт. 129) углы B, D «четыреугольника Саккери» $ABDC$ прямые, а углы A, C тупые. Насир-эдин восставляет в точке A перпендикуляр AE к AC ; он пересечет основание BD в точке E ; в треугольнике ABE угол E острый, вследствие чего AE как гипотенуза

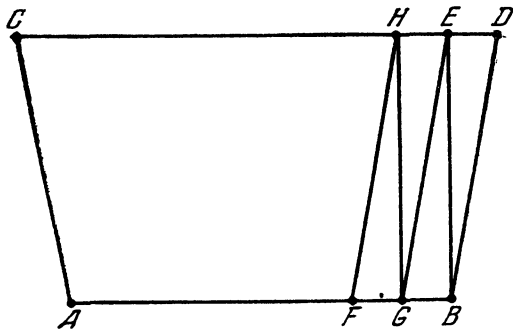
¹⁾ Насир-эдин был знаком с геометрическим трактатом Хайяма и написал комментарии к этому трактату, цитируемые Д. Е. Смитом в заметке [¹¹⁹].

больше катета AB . Далее он воссоставляет в точке E перпендикуляр EG к BD ; он пересечет основание AC в точке G ; в треугольнике AEG угол A прямой, а угол G острый, вследствие чего GE больше AE . Точно так же воссоставляются перпендикуляры GH к AC , HF к BD и т. д. до бесконечности и каждый из построенных перпендикуляров длиннее последующего, т. е. основания AC и BD расходятся в направлении от AB к CD . Но тот же процесс может быть произведен и в направлении от CD к AB , откуда мы видим, что прямые AC и BD расходятся и в этом направлении. Но такое положение находится в противоречии с постулатом Насир-эддина.



Черт. 129.

В случае гипотезы острого угла (черт. 130) углы A , B «четырехугольника Саккери» $ABDC$ прямые, углы C , D острые. Насир-эддин опускает из точки B перпендикуляр BE на CD ; он пересечет основание CD в точке E ; в треугольнике BDE угол D острый, вследствие чего DB как гипотенуза больше катета BE . Далее он опускает из точки E перпендикуляр EG на AB ; он пересечет основание AB в точке G ; в треугольнике BEG угол B острый, вследствие чего EB больше катета EG . Точно так же опускаются перпендикуляры GH , AB , HF на CD и т. д. до бесконечности и каждый из построенных перпендикуляров короче предыдущего, т. е. основания AB и CD сходятся в направлении от BD к AC . Но тот же процесс может быть произведен и в направлении от AB к BD , откуда мы видим, что прямые AB и CD сходятся и в этом направлении. Но такое положение также находится в противоречии с постулатом Насир-эддина.



Черт. 130.

В случае неевклидовых геометрий, когда действительно имеют место гипотезы тупого и острого угла, основания «четырехугольника Саккери» действительно в первом случае расходятся, а во втором случае сходятся от боковых сторон к середине.

В четвертом предложении первой редакции Насир-эддин доказывает, что если все углы

четырехугольника прямые, то его противоположные стороны равны. Это предложение и по формулировке и по доказательству совпадает с четвертым предложением Хайяма.

В пятом предложении Насир-эддин доказывает, что если прямая пересекает два перпендикуляра к одной прямой, то накрестлежащие и соответственные углы равны, а односторонние углы составляют в сумме два прямых. Это предложение и по формулировке и по доказательству мало отличается от седьмого предложения Хайяма.

Далее Насир-эддин выводит V постулат Евклида уже иначе, чем Хайям. Насир-эддин дает два варианта такого вывода: в первом варианте в шестом предложении он показывает, что перпендикуляр и наклонная обязательно пересекаются (частный случай V постулата, когда секущая перпендикулярна к одной из прямых), а в седьмом предложении доказывает V постулат. Во втором варианте в шестом предложении Насир-эддин доказывает, что если одну из сторон острого угла разделить на равные части и из точек деления опустить перпендикуляры на другую сторону, то эти перпендикуляры разделят другую сторону на равные части, в седьмом предложении он показывает, что из точки внутри угла можно провести прямую, пересекающую обе его стороны, и в восьмом предложении доказывает V постулат.

Сравнение третьего предложения второй редакции «Изложения Евклида» с первой предпосылкой («леммой») второй редакции «Изложения Евклида», приведенной там без доказательства (ч. I, стр. 119), показывает, что в отличие от второй и третьей предпосылок, являющихся действительно леммами, эта предпосылка по замыслу Насир-эddина является постулатом, повидимому, призванным заменить его постулат из первой редакции. Однако, как было отмечено в I части «Оснований», этот постулат был сформулирован некорректно и в приведенной формулировке представляет собой утверждение, легко доказываемое независимо от V постулата, а при доказательстве второй предпосылки Насир-эддин неявно пользуется утверждением, эквивалентным V постулату. Первая редакция «Изложения Евклида», как мы видим, свободна от этой ошибки.

Важное значение для теории параллельных линий имеют и заключительные предложения доказательства Насир-эddина в первой редакции, где по существу приводится ряд предложений, эквивалентных V постулату¹⁾.

¹⁾ Напомним, что незнание Лежандра с эквивалентностью V постулату утверждения о том, что из точки внутри угла можно провести прямую, пересекающую обе его стороны, привело его к ошибочному доказательству V постулата (см. ч. I, стр. 134—136).

ЛИТЕРАТУРА

1. C. F. Gauss und H. C. Schumacher. Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher. Altona, 1860—63, I—VI.
2. Н. И. Лобачевский. Геометрические исследования по теории параллельных линий. Полное собрание сочинений Н. И. Лобачевского, М.—Л., I, 1946. Отд. изд. АН СССР, М.—Л., 1945.
3. N. J. Lobatschewsky. Études géométriques sur la théorie de parallèles, suivis d'un extrait de la correspondance de Gauss et de Schumacher. Traduit par G. J. Hoüel. Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. 4, Bordeaux, 1866. Отд. изд. Paris, Gauthier—Villars, 1866; изд. 2, 1895.
4. J. Bolyai. La science absolue de l'espace, indépendante de la vérité ou fausseté de l'axiome d'Euclide. Mémoires de Bordeaux, 5, 1867.
5. J. Hoüel. Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire. Paris, 1867; изд. 2, 1883.
6. N. Lobatschewsky. Pangeometria, o sunto di geometria fondato sopra una teoria generale e rigorosa delle parallele. Пер. Г. Батальини (G. Battaglini), Giorn. mat., 5, 1867. Отд. изд. Napoli, 1868.
7. G. Battaglini. Sulla geometria imaginaria di Lobatschewsky. Giorn. mat. 5, 1867.
8. В. Ф. Каган. Основы теории поверхностей. тт. I, II, М.—Л., Гостехиздат, 1947, 1948.
9. E. Beltrami. Risoluzione del problema, riportari i punti di una superficie sopra un piano in modo che linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette Ann. mat., 7, 1865, Opere mat., I, N XIV, 1865.
10. G. Darboux. Leçons sur la théorie générale des surfaces. III, Paris, 1894.
11. E. Beltrami. Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea. Giorn. mat., Napoli, 6, 1868; Opere mat., I, N XXIV. Русск. пер.: Е. Бельтрами. Опыт истолкования неевклидовой геометрии. Сб. «Об основаниях геометрии». Казань, изд. 2, 1895.
12. F. Minding. Ueber die Biegung krummer Flächen. Journ. reine und angew. Math., 18, 1838.
13. F. Minding. Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmasse. Journ. reine und angew. Math., 19, 1839.
14. F. Minding. Beiträge zur Theorie der kürzten Linien auf krummen Flächen. Journ. reine und angew. Math., 20, 1840.
15. U. Dini. Sulle superficie nelle quali la somma dei due raggi di curvatura principali è costante. Ann. Mat., 7, 1865.
16. С. П. Фиников. Теория поверхностей. М.—Л., ОНТИ, 1934.
17. E. Beltrami. Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche. Giorn. mat., 10, 1872; Opere mat., II.
18. G. Loria. Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Berlin—Leipzig, 1914, изд. 2, т. II, гл. 21.
19. F. Schilling. Die Pseudosphäre und die nichteuclidische Geometrie. Berlin—Leipzig, 1935.
20. G. Escherich. Die Geometrie auf den Flächen konstanter negativer Krümmung. Sitz. Ber. Ak. Wiss., Wien, 69, 1874.
21. D. Hilbert. Mathematische Probleme. Vortrag gehalten auf dem Internationalen Math. Kongress zu Paris, 1900. Gött. Nachr., 1900, 253—297; C.-R. Congr. intern. math., 2, Paris, 1900, 58—114.

22. D. Hilbert. Ueber Flächen von constanter Gauss'scher Krümmung Trans. Amer. Math. Soc., 2, 1901; помещено также в качестве приложения V к 7-му изданию «Grundlagen der Geometrie». Русск. пер.: Д. Гильберт. О поверхностях постоянной гауссовой кривизны, см. [22], приложение V.
23. E. Hölmgren. Sur les surfaces à courbure constante négative. C. R. Ac. sci., 134, 1902.
24. Д. Гильберт. Основания геометрии. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
25. F. Klein. Ueber die sogenannte nicht-euklidische Geometrie. Math. Ann., 4, 1871.
26. F. Klein. Ueber die sogenannte nicht-euklidische Geometrie. Gött. Nachr., 1871, 419—433.
27. C. F. Gauss. Disquisitiones generales circa superficies curvas. Commentat. Soc. Göttingensis, VI, 1827; Ges. Werke, IV. Русск. пер. К. Ф. Гаусс. Общие исследования о кривых поверхностях. Пер. М. М. Филиппова. Сб. «Об основаниях геометрии». Казань, изд. 2, 1895.
28. F. Klein. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Math. Ann., 43, 1893; Ges. Abh., I. Русск. пер. Ф. Клейн. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований. Изв. Каз. физ.-мат. об-ва (2), 5₂ и 6₂, 1895. Отд. изд. Казань, 1895.
29. Г. Вебер и И. Вельштейн. Энциклопедия элементарной математики. т. II, Одесса, Матезис, 1913.
30. С. А. Богомолов. Основания геометрии. М.—П., ГИЗ, 1923.
31. G. K. Staudt. Geometrie der Lage. Nürnberg, 1847.
32. J. Steiner. Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Berlin, 1832; Ges. Werke, I.
33. S. Lie. Theorie der Transformationsgruppen. Herausgegeben von F. Engel. Abschn. 1—3, Leipzig, 1888—1893; изд. 2. Leipzig, 1893.
34. S. Lie. Vorlesungen über continuierliche Gruppen. Bearbeitet von G. Scheffers, Leipzig, 1893.
35. L. Bianchi. Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni. Spoerri, Pisa, изд. 1 (литогр.), 1903; изд. 2, 1918; Bologna, 1928.
36. Н. Г. Чеботарев. Теория групп Ли. М.—Л., ГИТТЛ, 1940.
37. A. Cayley. A sixth memoir upon quantics. Phil. Trans. Soc. London, 149, 1859; Coll. Papers, II, № 158.
38. Р. Бальдус. Неевклидова геометрия. М.—Л., ОНТИ, 1933. (R. Baldus. Nichteuklidische Geometrie der Ebene. Berlin, 1927; изд. 2, 1944.)
39. Н. В. Ефимов. Высшая геометрия. М.—Л., Гостехиздат, 1945; изд. 2, 1929; изд. 3, 1953.
40. В. И. Костин. Основания геометрии. М.—Л., Гостехиздат, 1946.
41. Н. И. Мусхелишвили. Курс аналитической геометрии. М.—Л., ОНТИ, 1938.
42. Я. Болъаи. Appendix. Приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида (что а priori никогда решено быть не может), с прибавлением к случаю ложности геометрической квадратуры круга. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
43. H. Liebmann. Die Konstruktion des geradlinigen Dreiecks der nichteuklidischen Geometrie aus den drei Winkeln. Berlin—Leipzig Ges. Wiss., 53, 1901.
44. H. Liebmann. Die elementaren Konstruktionen der nichteuklidischen Geometrie. Jahresber. Deutsch. Mathem. Vereinigung, 20, 1911.
45. M. Simon. Nichteuklidische Geometrie in elementarer Behandlung. Berlin—Leipzig, 1925.
46. Д. Д. Мордухай-Болтовской. О геометрических построениях в пространстве Лобачевского. Сб. «In memoriam N. I. Lobatschevskii», II, Казань, 1927.
47. Н. М. Несторович. Геометрические построения в плоскости Лобачевского. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
48. М. В. Гиршович. О геометрических построениях на плоскости Лобачевского. ДАН, 60, № 5, 1948.
49. М. В. Гиршович. О геометрических построениях на плоскости Лобачевского. Уч. зап. Калининского педагогического ин-та им. Калинина, 16, 1954.
50. В. Ф. Рогаченко. О разрешимости задач на построение в плоскости Лобачевского с помощью циркуля и гиперциркуля или орициркуля и гипердиркуля. ДАН, 88, № 4, 1953.
51. M. Grossmann. Die fundamentalen Konstruktionen der nichteuklidischen Geometrie. Frauenfeld, 1904.

52. А. С. С мо г о р ж е в с к и й. Геометрические построения в плоскости Лобачевского. М.—Л., Гостехиздат, 1951. (Серия «Геометрия Лобачевского и развитие ее идей», вып. III.)
53. Н. А. Г л а г о л е в. Проективная геометрия. М.—Л., ОНТИ, 1936.
54. Н. L i e b m a n n. Die Kegelschnitte und die Planetenbewegung im nichteuklidischen Raum. Berlin—Leipzig. Ges. Wiss., 54, 1902.
55. A. C a y l e y. Tenth memoirs on quantics. London, 1879.
56. F. K l e i n. Ueber die sogenannte Nicht-euklidische Geometrie. Math. Ann. 6, 1873.
57. B. R i e m a n n. Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Gött. Abh. Ges. Wiss., 13, 1868; Ges. Werke, 1876, № XIII; отд. изд. с комм. Г. Вейля, Berlin, 1923. Русск. пер.: Б. Р им а н. О гипотезах, лежащих в основании геометрии. «Избранные сочинения», М.—Л., Гостехиздат, 1948.
58. Н. H e l m h o l t z. Ueber die Tatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Gött. Nachr., 14, 1869, 193—221. Русск. пер.: Г. Г е л ь м г о л ь ц. О фактах, лежащих в основании геометрии. Сб. «Об основаниях геометрии», Казань, 1893; изд. 2, 1895.
59. F. S c h u r. Über den Zusammenhang der Räume konstanten Riemannschen Krümmungsmasses mit den projectiven Räumen. Math. Ann., 27, 1886, 537—567.
60. S. L i e. Ueber die Grundlagen der Geometrie. Verh. d. Sächs. Ges. Wiss. zu Leipzig, 42, 1890, 284—321.
61. Б. К. М л о д з е е в с к и й. О многообразиях многих измерений. Уч. зап. Моск. ун., отд. физ.-мат., вып. 8, 1889, отд. изд. М., 1889.
62. Ф. М. С у в о р о в. О характеристиках систем трех измерений. Уч. зап. Каз. ун., 7, 1871.
63. А. П. Э й з е н х а р т. Риманова геометрия. М., ИЛ, 1948. (L. P. E i s e n h a r t. Riemannian Geometry. Princeton, 1926.)
64. П. К. Р а ш е в с к и й. Введение в риманову геометрию и тензорный анализ. М.—Л., ОНТИ, 1936.
65. П. К. Р а ш е в с к и й. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., Гостехиздат, 1953.
66. С. А. Б о г о м о л о в. Введение в неевклидову геометрию Римана. М.—Л., ОНТИ, 1934.
67. W. K i l l i n g. Einführung in die Grundlagen der Geometrie. Paderborn, 1893.
68. W. K. C l i f f o r d. Preliminary sketch of Biquaternions. Proc. Lond. Math. Soc., IV, 1873, 381—395; Math. Papers, стр. 181—200. Русск. пер.: приложение к книге: В. К л и ф ф о р д. Здравый смысл точных наук. Москва, 1910.
69. D. M. S o m m e r v i l l e. Classification of geometries with projective metric. Proc. Math. Soc., 28, 1910.
70. Ф. К л е й н. Неевклидова геометрия. М.—Л., ОНТИ, 1936. (F. K l e i n. Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie; лекции, прочит. в Геттингене в 1889—1890 гг., обработаны Ф. Ш и л л и н г о м (F. Schilling); литограф. изд.: Göttingen, 1892; изд. 2, там же, 1893; изд. 3, переработанное В. Р о з е м а н н о м (W. Rosemann), Берлин, 1928, с которого и сделан русский перевод).
71. E. L a g u e r r e. Note sur la théorie des foyers. Nouv. Ann. Math., 12, 1853; Oeuvres, II.
72. H. P o i n c a r é. Sur les fonctions fuchsienues. C. R. Ac. sci., 92—95, 1881—1882; 97, 1883.
73. A. F. M ö b i u s. Ueber eine Methode, um von Relationen, welche der Longimetrie angehören, zu entsprechenden Sätzen der Planimetrie zu gelangen. Leipz. Sitzungsber., 4, 1852; Ges. Werke, II.
74. A. F. M ö b i u s. Ueber eine Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren. Leipz. Sitzungsber., 5, 1853, Ges. Werke, II.
75. A. F. M ö b i u s. Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischen Darstellung. Leipz. Abhandl., 2, 1855; Ges. Werke, II.
76. A. F. M ö b i u s. Ueber eine neue Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren. Journ. reine angew. Math., 52, 1856.
77. Б. А. Б у к р е е в. Планиметрия Лобачевского в аналитическом изложении. М.—Л., Гостехиздат, 1951. (Серия «Геометрия Лобачевского и развитие ее идей», вып. IV.)
78. С. О. Ш а т у н о в с к и й. Введение в анализ. Одесса, Матезис, 1923.
79. M. P a s c h. Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig, Teubner, 1882.
80. G. P e a n o. I principii di geometria logicamente esposti. Torino, 1889.
81. G. P e a n o. Sui fondamenti della geometria. Torino, Riv. mat., 4, 1894; 51—90.
82. G. V e r o n e s e. Fondamenti di geometria a più dimensioni ed a più spezie di unità rettilinee in forma elementare. Padova, 1891. Нем. пер. A. S c h e r p, Leipzig, 1894.

83. M. P i e r i. Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo. Mem. Acc. Sc., Torino (2), 49, 1899, 173—222.
84. A. P a d o a. Un nouveau système de définitions pour la géométrie euclidienne. C. R. Congr. intern. math., 2, 1900, 353—363.
85. D. H i l b e r t. Grundlagen der Geometrie. Leipzig, 1899; изд. 7 (значительно переработанное с 10 приложениями), 1930. Русск. перев. [24].
86. В. Ф. К а г а н. Основания геометрии. т. 1: Опыт обоснования евклидовой геометрии. Одесса, 1905; т. 2: Исторический очерк развития учения об основаниях геометрии. Одесса, 1907.
87. M. D e h n. Die Grundlagen der Geometrie in historischer Entwicklung. (В книге M. P a s c h und M. D e h n. Vorlesungen über neuere Geometrie. Berlin, 1926.)
88. C. F. G a u s s. Werke. Bd. 8. Grundlagen der Geometrie. Gött.—Lpz., 1900.
89. F. A m o d e o. Quali passano essere i postulati fondamentali della geometria proiettiva di uno *Sr.* Atti. Acc. Sc., Torino, 26, 1891, 741—770.
90. G. F a n o. Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva i uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. Giorn. di mat., 30, 1892, 106—132.
91. F. E n r i q u e s. Sui fondamenti della geometria proiettiva. Ist. Lomb. Milano (2), 27, 1894, 550—567.
92. M. P i e r i. I principi della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo. Accademia R. di Torino, 1898.
93. M. P i e r i. Nuovo modo di svolgere la geometria proiettiva. Rendiconti del R. Istituto Lombardo, S. II, 31, 1898.
94. E. V. H u n t i n g t o n. A new set of postulats for betweens with proof of complete independence. Trans. Am. Math. Soc., 26, 1926.
95. Начала Евклида. М.—Л., Гостехиздат, книги I—VI, 1948; книги VII—X, 1949; книги XI—XV, 1950.
96. O. S t o l z. Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes. Ber. Naturw. Med. Ver., 12, 1882, 74—89; Math. Ann., 22, 1883, 504—519.
97. O. S t o l z. Ueber das Axiom des Archimedes. Math. Ann., 39, 1891, 107—112.
98. Архимеда две книги «О шаре и цилиндре», «Измерение круга» и «Леммы». Пер. с греч. («Леммы» с латинск.) Ф. П е т р у ш е в с к о г о, СПб, 1823.
99. G. C a n t o r. Beiträge zur Begründung der Transfiniten Mengenlehre. Math. Ann., 46, 1897.
100. T. L e v i - C i v i t a. Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quoli elementi analitici. Atti del R. Istituto Veneta, 7, 1894.
101. J. T h o m a e. Abriss einer Theorie der complexen Functionen und Thetafunctionen einer Veränderlichen. Halle, 1870.
102. P. D u - B o i s R e y m o n d. Ueber asymptotische Werte, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösung von Gleichungen. Math. Ann. 8, 1874.
103. R. B a l d u s. Zur Axiomatik der Geometrie über Hilberts Vollsteindigkeits. I мемуар—Math. Ann., 100, 1928, 321—333; III мемуар—Sitzungsberichte der Heidelberger Axiomatik der Wiss. Math. Naturwis. Klasse, 1930; V мемуар—Sitzungsberichte der Bauersch. Axiomatik, 1937.
104. В. Ш в а н. Элементарная геометрия. М., Учпедгиз, 1937.
105. G. C a n t o r. Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. Math. Ann., 5, 1872; эта статья имеется также в Gesammelte Abhandlungen, Berlin, 1932, 92—102.
106. R. D e d e k i n d. Stetigkeit und irrationalen Zahlen. Braunschweig, 1872. Русск. пер.: Р. Д е д е к и н д, Непрерывность и иррациональные числа, Одесса, Матезис, 1906; имеется также в «Сборнике научно-популярных статей по основаниям арифметики», Казань, 1906, 68—95.
107. O. V e b l e n. A system of axioms for geometry. Trans. Amer. Math. Soc., 5, 1904, 343—384.
108. I. H. L a m b e r t. Theorie der Parallellinien. Leipziger Magazin reine angew. Math., 1786.
109. Н. И. Л о б а ч е в с к и й. Полное собрание сочинений. Под общей редакцией В. Ф. Кагана, А. П. Котельникова, А. П. Нордена, В. В. Степанова, Н. Г. Чебогарева, П. А. Широкова. Главный редактор В. Ф. Каган, М.—Л., Сочинения по геометрии помещены в первых трех томах.
110. Б. А. Р о з е н ф е л д. Неевклидовы геометрии. М., Гостехиздат, 1955.
111. H. P o i n c a r é. Hypothèses fondamentales de la géométrie. Bulletin de la Soc. math. France, 15, № 7, 1887, 203—216. Русск. пер.: А. П у а н к а р е. Об основных гипотезах геометрии. Сборник «Об основаниях геометрии», Казань, 1893, 109—121.
112. Я. С. Д у б н о в. Векторное исчисление. ч. I, М.—Л., Гостехиздат, 1950.

-
113. T. L. Heath. Mathematics in Aristotel. Oxford, 1949.
 114. Аристотель. Аналитики первая и вторая. М., Госполитиздат, 1952.
 115. Омар Хайям. Комментарии к трудным постулатам книги Евклида. Историко-матем. иссл., вып. VI, М., Гостехиздат, 1953, 67—107.
 116. Р. М. Султанов. Насирэддин Туси о постулате параллельности. Изв. АН Азерб. ССР, № 10, 1951, 53—62.
 117. Б. А. Розенфельд. О математических работах Насирэддина Туси. Историко-матем. иссл., вып. IV, М., Гостехиздат, 1951, 489—512. Эта же работа (с рядом дополнений) помещена в Изв. АН Азерб. ССР, № 4, 1953, 35—50.
 118. Аристотель. Физика. М.—Л., Соцэкгиз, 1939.
 119. D. E. Smith, Euclid, Omar Khayyam and Saccheri. Scripta mathematica, 3: 1, 1935, 5—10.
 120. Насирэддин Туси. Тахрир Уклидас фи илм ал-хандаса. Тегеран, 1888.
-

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Ал-Бируни (Абу-Рейхан-Мухаммед ибн-Ахмед ал-Бируни, Bîrûnî A. R.) 326
 Ал-Джуджани, Убу-Убейд 326
 Ал-Хайсам (Alhazen) 326
 Ал-Хорезми (Algrithmus) 325
 Амодео Ф. (Amodeo F.) 259, 335
 Ан-Найризи, Абу-л-Фазла (Аннариций, ат-Табризи, An-Nairizi) 325
 Аристотель (Ἀριστοτέλης, Aristotelis) 258, 323, 324, 325, 326, 335, 336
 Архимед (Ἀρχιμήδης, Archimedes) 73, 276, 281, 284, 285, 335
 Бальдус Р. (Baldus R.) 74, 296, 303, 333, 335
 Батальини Г. (Battaglini G.) 11, 332
 Бельтрами Е. (Beltrami E.) 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 27, 32, 33, 36, 37, 38, 64, 87, 153, 186, 229, 246, 332
 Бианки Л. (Bianchi L.) 46, 333
 Богомолов С. А. 41, 155, 333, 334
 Болъай Ф. (Bolyai F.) 259
 Болъай Я. (Bolyai J.) 11, 101, 332, 333
 Больцано Б. (Bolzano B.) 297
 Букреев Б. Я. 246, 334
 Валлис Д. (Wallis J.) 329
 Вебер Г. (Weber H.) 41, 333
 Веблен О. (Veblen O.) 303, 309, 335
 Вейль Г. (Weyl H.) 334
 Вельштейн И. (Wellstein J.) 41, 333
 Венцель М. К. 175
 Веронезе Д. (Veronese G.) 259, 281, 282, 283, 285, 334
 Галуа Э. (Galois É.) 41
 Гаусс К. Ф. (Gauss C. F.) 11, 12, 16, 25, 38, 147, 148, 259, 332, 333, 335
 Гельмгольц Г. (Helmholtz H.) 147, 153, 334
 Гентингтон Е. (Huntington E. V.) 259, 260, 312, 335
 Гильберт Д. (Hilbert D.) 33, 35, 36, 74, 259, 267, 285, 286, 303, 305, 309, 332, 333, 335
 Гиршович М. В. 101, 250, 333
 Глаголев Н. А. 334
 Гольмгрэн Е. (Holmgren E.) 35, 333
 Гроссман М. (Grossmann M.) 101, 333
 Гуревич Г. Б. 9
 Гюйгенс Х. (Huyghens Ch.) 28
 Даламбер Ж. (D'Alembert J.) 39
 Дарбу Г. (Darboux G.) 16, 332
 Дедекинд Р. (Dedekind R.) 147, 152, 297, 303, 335
 Декарт Р. (Descartes R.) 312
 Ден М. (Dehn M.) 259, 335
 Дини У. (Dini U.) 25, 33, 332
 Досифей 281
 Дубнов Я. С. 9, 318, 335
 Дю-Буа-Реймон П. (Du Bois Reymond P.) 286, 335
 Евдокс (Εὐδοξος, Eudoxus) 280, 281
 Евклид (Εὐκλείδης, Euclid) 39, 72, 74, 154, 155, 218, 259, 280, 281, 324, 325, 326, 328, 329, 335
 Ефимов Н. В. 74, 333
 Ибн Сина (Абу-Али Хусейн ибн Абдаллах ибн Сина, Avicenna) 325, 326
 Каган В. Ф. 9, 12, 16, 24, 25, 33, 179, 219, 235, 313, 323, 324, 332, 335
 Кантор Г. (Cantor G.) 281, 296, 297, 303, 335
 Киллинг В. (Killing W.) 157, 334
 Клейн Ф. (Klein F.) 22, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 49, 63, 66, 68, 72, 73, 74, 75, 84, 87, 88, 130, 138, 139, 142, 144, 147, 148, 152, 154, 210, 214, 222, 229, 231, 239, 245, 246, 305, 310, 314, 319, 333, 334
 Клиффорд В. К. (Clifford W. K.) 204, 334
 Костин В. И. 74, 333
 Котельников А. П. 335
 Кэли А. (Cayley A.) 66, 84, 130, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 142, 143, 144, 147, 163, 210, 214, 227, 229, 231, 333, 334
 Лагерр Е. (Laguerre E.) 224, 315, 334
 Лагранж Ж. (Lagrange J. L.) 197
 Ламберт И. Г. (Lambert J. H.) 313, 335
 Лапко А. Ф. 9
 Леви-Чивита Т. (Levi-Civita T.) 281, 335
 Лежандр А. М. (Legendre A. M.) 39, 73, 74, 259, 331
 Ли С. (Lie S.) 39, 41, 45, 46, 48, 49, 50, 54, 60, 68, 154, 305, 310, 333, 334
 Либман Г. (Liebmann H.) 101, 122, 333, 334
 Лобачевский Н. И. 9, 11, 12, 16, 21, 22, 23, 38, 72, 87, 88, 154, 155, 218, 231, 245, 246, 313, 332, 335

- Лопшиц А. М. 9
 Лоренц И. Ф. (Lorenz J. F.) 66
 Лория Д. (Loria G.) 28, 332
 Менье Ж.-Б.-М.-Ш. (Meusnier M.) 29
 Меркатор Н. (Mercator N., Kremer N.) 12
 Мёбиус А. (Möbius A. F.) 63, 231, 235, 334
 Миндинг Ф. (Minding F.) 22, 24, 25, 33, 38, 153, 332
 Минковский Г. (Minkowski H.) 316
 Млодзеевский Б. К. 154, 334
 Мордухай-Болтовской Д. Д. 101, 333
 Мусхелишвили Н. И. 333
 Нассир-эддин ат-Туси (Nasiraddin, Абу Джафар Мухаммед ибн Гасан ат-Туси) 73, 323, 325, 328, 329, 330, 331, 336
 Несторович Н. М. 101, 333
 Норден А. П. 335
 Падоя А. (Padoa A.) 259, 335
 Паш М. (Pasch M.) 73, 243, 259, 260, 261, 334, 335
 Пеано Д. (Peano G.) 259, 334
 Петрушевский Ф. 335
 Пиери М. (Pieri M.) 259, 334, 335
 Прокл (Πρόκλος, Proclus) 328
 Пуанкаре А. (Poincaré H.) 231, 239, 243, 245, 246, 314, 320, 334, 335
 Рашевский П. К. 9, 154, 314, 334
 Риман Б. (Riemann G. F. B.) 42, 147, 148, 149, 151, 152, 153, 154, 155, 180, 218, 334
 Рогаченко В. Ф. 101, 333
 Роземанн В. (Rosemann W.) 210, 334
 Розенфельд Б. А. 323, 335, 336
 Саккери Д. (Saccheri G.) 327, 328
 Симон М. (Simon M.) 101, 333
 Смит Д. Е. (Smith D. E.) 327, 336
 Смогоржевский А. С. 102, 333
 Соммервилль Д. (Sommerville D. M.) 210, 334
 Степанов В. В. 335
 Суворов Ф. М. 154, 334
 Султанов Р. М. 336
 Сушкевич А. К. 117, 175
 Тауринус Ф. А. (Taurinus F. A.) 11
 Томе И. (Thomae J.) 283, 284, 285, 335
 Уэль Г. Д. (Hoüel G. J.) 11, 12, 332
 Фано Д. (Fano G.) 259, 335
 Фиников С. П. 25, 332
 Фрейдина М. Г. 9
 Хайям Омар (Al Khayyâmî 'U.) 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 336
 Хис Т. (Heat T. L.) 323, 335
 Христофель Е. (Christoffel E. B.) 150
 Чеботарев Н. Г. 46, 333, 335
 Шаль М. (Chasles M.) 177
 Шатуновский С. О. 254, 256, 275, 276, 283, 306, 334
 Шван М. (Schwan M.) 296, 303, 335
 Швейкарт Ф. К. (Schweikart F. K.) 11
 Шефферс Г. (Scheffers G.) 333
 Шиллинг Ф. (Schilling F.) 29, 246, 332, 334
 Широков П. А. 335
 Штаудт Х. (Staudt G. K. Ch.) 42, 333
 Штейнер Я. (Steiner J.) 42, 333
 Штольц О. (Stolz O.) 281, 284, 296, 335
 Шумахер Г. Х. (Schumacher H. Ch.) 11, 16, 332
 Шур Ф. (Schur F. H.) 152, 334
 Эйзенхарт Л. П. (Eisenhart L. P.) 154, 334
 Эйлер Л. (Euler L.) 40, 57, 63
 Энгель Ф. (Engel F.) 333
 Энрикес Ф. (Enriques F.) 259, 335
 Эшерих Г. (Escherich G.) 33, 332
 Юшкевич А. П. 323, 326
 Яблоновский А. В. 9, 122
 Яглом И. М. 9
 Ямпольский В. Г. 9, 122

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолют 87, 88, 90, 128, 135
 — двумерного мероопределения 138
 — клейновой интерпретации 86, 88, 90
 — линейный 211
 — на прямой, действительный 141
 — — —, мнимый 139
 — угловой 145, 211
 Абсцисса точки непрерывной прямой 302
 Автоморфизм 43
 Аддитивность отношения отрезков 293
 Аксиома Архимеда 281
 — — в пространстве L_2 73
 — Гильберта 275
 — полноты 303
 Аксиоматика двусторонней прямой 310
 — упорядоченного множества 312
 Аксиомы движения 305
 Алгоритм Евклида 280, 290

 Бельтрамиев круг 17
 Бельтрамиевы координаты 14

 Векторы коллинеарные 316
 — ортогональные 315, 316
 Величина 253
 Величины трансфинитные 284
 Вершина луча 269
 Винтовая линия на псевдосфере 32
 Внутренняя точка образа 265
 — — отрезка 265
 Вращение в пространстве 62
 — вокруг начала в L_2 69
 — — точки O 112
 — ориентированное 116
 — плоскости L_2 вокруг бесконечно удаленной ее точки 98
 — — — — обыкновенной ее точки 97

 Гармонические пары точек 131
 Геометрии изоморфные 43
 Геометрия I 211, 229
 — II, 211, 229
 — II₂ 211, 230
 — III 218, 230
 — IV₁ 223, 230
 — IV₂ 225, 230
 — V₁ 225, 230
 — V₂ 225, 230
 — VI 228, 230
 — EE 218, 229, 230
 — EH 214, 229, 230
 — EP 226, 230

 Геометрия HE 215, 229
 — HH 213, 229
 — HP 226, 230
 — PE 223, 230
 — PH 225, 230
 — PP 229, 230
 — P₂ 240
 — архимедова 284
 — в пространстве L_2 72
 — двумерная гиперболическая, построенная внутри единичного круга 68
 — — эллиптическая 164
 — двусторонней прямой 309
 — Евклида 223, 230
 — Лобачевского 215, 229
 — одномерная сферическая 158
 — — эллиптическая 158
 — проективная 42
 — прямой аффинная 53
 — — евклидова 51
 — — метрическая 305
 — — проективная 54
 — — эллиптическая 140
 — псевдоевклидова 225, 230
 — пучка лучей 158
 — — прямых 158
 — Римана 154, 218, 230
 — сферическая 155, 164
 — сферической прямой 158
 — центральной связки лучей 164
 — — — прямых 164
 — эллиптическая 155
 — эллиптической прямой 158
 Гильбертовы числа 286
 Гипербола вогнутая в L_2 126
 — выпуклая в L_2 126
 Гиперболическая пара точек 211
 Гомотетия обратная 57
 — отрицательная 57
 — положительная 57
 Группа автоморфизмов 68
 — аффинных преобразований плоскости 57
 — — — пространства 62
 — — — прямой 53
 — вращений в пространстве 62
 — — и отражений в пространстве 62
 — — плоскости 55
 — гомотетий 57
 — дважды транзитивная 48
 — движений в пространстве 62
 — — — евклидовой плоскости 56

- Группа евклидовых движений и отражений в пространстве 62
- интранзитивная 48
 - конечная 45
 - — непрерывная 45
 - круговых преобразований, основная 235
 - Кэли—Клейна 66
 - лоренцовых преобразований 66
 - m -параметрическая 45
 - m -членная 45
 - непрерывная 54, 310
 - несвязная 54, 310
 - параллельных перенесений в евклидовом пространстве 61
 - — переносов плоскости 55
 - преобразований 41
 - — подобия 57, 224
 - — плоскости 57
 - проективных преобразований конического сечения 91
 - — — плоскости 59
 - — — пространства 63
 - — — прямой 53
 - растяжений 51
 - , размерность 45
 - связная 54, 310
 - скольжения плоскости 55
 - — прямой 50
 - транзитивная 47
 - центроафинных преобразований плоскости 59
 - центроэквафинных преобразований плоскости 59
 - эквиафинных преобразований плоскости 59
- Группы изоморфные 49
- совпадающие 49
- Две пары точек, не разделяющие друг друга (условие) 133
- — , разделяющие друг друга (условие) 133
- Движение прямой в себе 305
- Движения 306
- в $\mathcal{E}_2$ 165
 - — $\mathcal{E}_3$ 182, 192, 193
 - гиперболические в L_2 68, 99
 - и отражения гиперболические, составляющие центр основного круга в покое 68
- Двойное отношение четырех точек эллиптической прямой 160
- Двойные точки преобразования 239
- Деление отрезка пополам в L_2 103
- угла пополам 96, 106
- Делитель группы 47
- — нормальный 47
- Дефект угловой 313
- Дискриминант уравнения линии второго порядка 410
- Длина геодезической окружности 19
- дуги в R_n 149
 - — на псевдосферической поверхности 18
- Длина окружности на псевдосферической поверхности 20
- отрезка 296, 302
 - — относительно абсолюта 136
- Дробь подходящая 292
- Единица меры 295
- Закон движения в L_2 71
- Значение величины 253
- параметра, начальное 45
- Избыток угловой 313
- — треугольника в $\mathcal{E}_2$ 176
- Изгибание поверхности 147
- Измерение отрезков 295
- — в L_2 75
 - — углов в L_2 79
- Изоморфные геометрии 43
- Иммерсия бинарной дифференциальной квадратичной формы в трехмерное евклидово пространство 23
- Инвариант 41, 48
- линии второго порядка 110
- Инвариантная подгруппа 47
- Инварианты гиперболического движения 119, 120, 121
- круговых преобразований 236
 - — уравнения линии второго порядка 110
 - — вырожденной линии второго порядка 120
- Инволюция 96
- Интервал 265
- Интервалы взаимно дополнительные эллиптической прямой 162
- Интерпретация геометрического движения 38, 39
- гиперболической геометрии Клейна 85, 87
 - — плоскости Бельтрами 22
 - Пуанкаре 239
 - — с круговым абсолютом 249
- Каноническая классификация автоморфизмов плоскости L_2 99
- Канонические виды уравнений пар прямых в L_2 122
- Канонический вид уравнения линии второго порядка 122, 124
- Карта бельтрамиева гиперболической плоскости 37
- Меркатора 12
- Картографическая задача Бельтрами 12
- Классификация вырожденных линий второго порядка 128—129
- невырожденных линий второго порядка 125—128
- Клиффордов параллелограмм 208
- Клиффордова поверхность 207
- Клиффордовы параллели 204
- Коллинеация 42, 60
- Коммутативность суммы отрезков 288
- Конгруэнтность 40
- Конечная точка отрезка 273
- Конечность пространства 154
- эллиптической плоскости 165

- Конус изотропный 315
 Координаты бельтрамиевы 14
 — — в L_2 75
 — — — $\mathcal{E}_2$ 179
 — — однородные 109
 — — прямой в L_2 110
 — — прямой в L_2 78
 — декартовы на клиффордовой поверхности 208
 — плоскости в $\mathcal{E}_3$ 183
 — — нормальные 183
 — — прямой в $\mathcal{E}_2$ 167
 — — однородные 43, 54
 — — — бельтрамиевы 110
 — середины отрезка относительно абсолюта, вычисление 136
 — точки в $\mathcal{E}_2$, нормальные 164
 — — — $\mathcal{E}_3$, нормальные 182
 Кординация асимптотическая 33
 — лонгальная 33
 — точек прямой 302
 Крайние точки отрезка 265
 — — сегмента 162
 Крайняя точка образа 265
 Кривизна 25
 — внутренняя 25
 — гауссова 25
 — метрической формы 219
 — пространства R_n в точке относительно плоской площадки 151
 — риманова пространства 151
 — сферы 14
 — эллиптической плоскости 164, 180
 Кривизны главных сечений псевдосферы 29
 Кривые постоянной кривизны в L_2 82
 — — — в P_2 246
 Круг бельтрамиев 17

 Линия алгебраическая на плоскости L_2 109
 — в R_n 149
 — второго порядка вырожденная 119
 — — — невырожденная 119
 — геодезическая в R_n 150
 — предельная в L_2 83
 Луч 269
 Лучи, обращенные в одну сторону 270
 —, — в противоположные стороны 270
 — противонаправленные 270
 — сонаправленные 270

 Матрица уравнения линии второго порядка 110
 Меропределение в пучке прямых 145
 — — — параболическое 146
 — — — длин в Π_1 , гиперболическое 212
 — — — Π_2 , эллиптическое 213
 — на прямой, гиперболическое 141
 — — —, параболическое 143
 — — —, эллиптическое 139
 — проективное 144
 — углов в Π_1 , гиперболическое 213
 — — — Π_2 , гиперболическое 213
 — — гиперболическое 145

 Меропределение углов параболическое 146
 — — эллиптическое 145
 Метод Больцано 297
 Метрика в римановом пространстве 148
 — в P_2 241
 — гиперболическая 142
 — Кэли в образе первой ступени 136
 — непрерывной прямой 299
 — параболическая 144
 — проективная 144
 — эллиптическая 140
 Миноры главные 110
 Многообразие n измерений 147
 — численное 148
 Множество всюду плотное 288
 — (прямая) L_{II} 265
 — упорядоченное 274
 Модель псевдоевклидова пространства на евклидовой плоскости 316

 Начало двойственности в $\mathcal{E}_2$ 169
 Начальная точка отрезка 273
 Независимость инвариантов преобразования 48
 — параметров 45
 — постулата Архимеда от постулатов I—III 281—286
 — — Кантора 297
 — постулатов движения 307
 — — конгруэнтности 276—277
 — — расположения 261—264
 — — сравнения 255—258
 — — структуры и расположения 265
 Неограниченность пространства 154
 Неподвижные точки преобразования 239
 Непротиворечивость постулатов движения 307
 — — конгруэнтности 276
 — — расположения 261
 — — сравнения 255
 — — структуры и расположения 265

 Область преобразования 43
 — преобразованная 43
 Образ 265
 — прямолинейный 265
 Образы конгруэнтные 68
 —, не покрывающие друг друга 267
 —, симметричные в L_2 68
 Объект геометрического исследования 41
 Объем псевдосферы 30
 Однородность прямой 277
 Окружность в L_2 83
 — — L_2 127
 — — граничная 18, 37
 — — единичная 37
 — — идеальная в L_2 127
 — — мнимая в L_2 127
 — — предельная 18
 Опорные точки координации прямой в $\mathcal{E}_3$ 189
 Определение длин сторон треугольника в $\mathcal{E}_2$ 172
 — углов треугольника в $\mathcal{E}_2$ 172
 Опускание перпендикуляра из точки на прямую 89

- Ориентация тройки точек на плоскости 58
 Орицикл в L_2 128
 — — — идеальный 128
 Ортогональность 315
 Ось проективного преобразования 93
 — трактрисы 28
 Отношение 252
 — ангармоническое 54, 60
 — двойное 54, 60
 — — четырех точек конического сечения 91
 — — — эллиптической прямой 160
 — двух отрезков 291, 293
 — необратимое 253
 — обратимое 252
 — транзитивное 253
 Отображение Бельтрами 12
 — геодезическое 12
 — — $\mathcal{E}_2$ на E_3 186
 — гиперболической плоскости на евклидову 37
 — конформное 12
 — псевдосферы на гиперболическую плоскость 32
 — — — евклидову плоскость 30
 — эквиареальное 12
 Отражение 158
 — в $\mathcal{E}_3$ 182, 192, 193
 — от плоскости в пространстве 62
 — от прямой на плоскости 61
 — плоскости L_2 от прямой 95
 Отражения 309
 — гиперболические в L_2 68
 Отрезки вершинные 274
 —, кратные данному отрезку 279
 — пропорциональные 294
 — соизмеримые 280
 Отрезок нулевой 301
 — ориентированный 273
 — прямой 265
 Парабола вогнутая гиперболическая
 о двух ветвях в L_2 126
 — — — об одной ветви в L_2 127
 — выпуклая гиперболическая в L_2 127
 — идеальная в L_2 126
 — соприкасающаяся в L_2 128
 — эллиптическая в L_2 126
 Параллельное перенесение в евклидовом пространстве 61
 Параллельные геодезические 18
 Перемножение преобразований 46
 Перпендикуляр из точки на прямую в $\mathcal{E}_3$ 195
 — к двум непересекающимся прямым в $\mathcal{E}_3$, общий 200
 Письмо Гаусса Шумахеру 11
 Плоскости, взаимно перпендикулярные в $\mathcal{E}_3$ 184
 — граничные в L_3 90
 — евклидовы 315
 — идеальные в L_3 90
 — обыкновенные в L_3 90
 — полувеклидовы 315
 — псевдоевклидовы 315
 Плоскость в $\mathcal{E}_3$ 183
 Плоскость гиперболическая (L_2) 88
 — Лобачевского (L_2) 88
 — эллиптическая 164
 Площадь поверхности псевдосферы 29
 — треугольника в $\mathcal{E}_2$ 176
 — эллиптической плоскости 176
 Поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны 26
 — — — положительной кривизны 25
 — псевдосферические 17
 Поверхность геодезическая в R_n 151
 — Клиффорда 207
 Поворот вокруг прямой в $\mathcal{E}_3$ 195
 — отрезка вокруг его конечной точки в L_2 102
 — плоскости L_2 97
 Подгруппа инвариантная 47
 — нормальная 47
 Полином характеристический уравнения линии второго порядка 119
 Полугипербола в L_2 126
 Полугруппа 49
 Полюс плоскости в $\mathcal{E}_3$ 185
 — преобразования 236
 — прямой в $\mathcal{E}_2$ 167
 Полярная точка в $\mathcal{E}_2$ 166
 Полярная плоскость точки в $\mathcal{E}_3$ 185
 Понятие «больше» 253
 — «между» 260
 — «меньше» 253
 — «по одну сторону» 268
 — «по разные стороны» 268
 — «предшествует» 274
 — «равно» 253
 — «разделяет» 296
 — «следует за» 274
 — «состоит» 268
 Порядок алгебраической линии на плоскости L_2 109
 Последовательная нумерация точек прямой молинейной группы 267
 Постоянная эллиптической плоскости 164
 Построение биссектрисы 96, 106
 — в L_2 точек, отраженных от прямой 104
 — метрики Кэли 138
 — общего перпендикуляра к расходящимся прямым в L_2 108
 — отрезка параллельности в L_2 108
 — угла параллельности в L_2 107
 Постулат Архимеда 73, 281
 — Кантора 296
 — о параллельных в L_2 73
 Постулаты движения 306
 — конгруэнтности 275
 — непрерывности 297
 — порядка 260
 — расположения 260
 — сравнения 253
 — структуры 264
 — существования 312
 Преобразование взаимно однозначное 44
 — гиперболическое 94
 — конформное 236
 — непрерывное 44

- Преобразование обратное 40
 — однозначное 44
 — параболическое 94
 —, перемножение 46
 — плоскости аффинное 57
 — — круговое 231
 — — проективное 59
 — — центроаффинное 59
 — — центроэкваффинное 59
 — — эквиаффинное 59
 — подобия 223
 — проективное 42
 — — конического сечения 92
 — — пространства 63
 — тождественное 40
 — эллиптическое 94
 Преобразования Кэли—Клейна второго рода 67
 — — первого рода 67
 — проективные, оставляющие инвариантным данный круг 64—66
 — — прямой 53
 — прямых при движениях и отражениях в L_2 78
 Претворение комплексных чисел в величину 283
 Принцип Дедекинда 299
 Продолжение отрезка в сторону его крайней точки 270
 Произведение векторов в псевдоевклидовом пространстве, скалярное 314
 — групп преобразований 47
 — отрезка на число 300
 — преобразований 41
 Пропорция 294
 —, свойства 294—295
 Пространство Веронезе 285
 — гиперболическое (L_3) 90
 — евклидово со законоопределенной метрикой 314
 — L_2 68
 — линейное архимедово 284
 — — неархимедово 285
 — Лобачевского (L_3) 90
 — Минковского 316
 — n измерений 148
 — неархимедово 284
 — — Гильберта 285
 — псевдоевклидово 314
 — риманово 154
 — — n измерений 149
 — — постоянной кривизны 152
 — трансфинитное Гильберта 285
 Прямая 260
 — архимедова 284
 — в $\mathcal{E}_2$ 166
 — — $\mathcal{E}_3$ 185
 — гиперболическая 142, 144
 — декартова 312
 — изотропная 143
 — неархимедова 284
 — непрерывная 297
 — ориентированная 274
 — параболическая 144
 — проективная 163
 Прямая эллиптическая 140, 144
 — — на эллиптической плоскости 167
 Прямолинейная группа точек 266
 Прямые взаимно перпендикулярные в $\mathcal{E}_2$ 169
 — — — $\mathcal{E}_3$ 191
 — — полярные в $\mathcal{E}_3$ 191
 — гиперболические 211
 — граничные в L_2 88, 110
 — — — L_3 90
 — евклидовы псевдоевклидова пространства 315
 — — идеальные в L_2 88, 110
 — — — L_3 90
 — изоморфные 302
 — изотропные 211, 315
 — — на плоскости 225
 — обыкновенные в L_2 88, 110
 — — — L_3 90
 — перпендикулярные в L_2 80
 — — — L_2 89
 — псевдоевклидовы псевдоевклидова пространства 315
 — эллиптические 211
 Псевдосфера 27
 Пучок линий второго порядка 119
 — лучей 157
 — параллелей в L_2 90
 — прямых в $\mathcal{E}_2$ 170
 — — центральный в L_2 90
 — расходящихся прямых в L_2 90
 — собственно сходящихся прямых в L_2 90
 Разбисные луча внутренней точкой 269
 — — прямолинейного образа 268
 Размерность группы 45
 Разность отрезков 280
 Ранг линии второго порядка 119
 — уравнения линии второго порядка 110
 Расположение двух пар точек на эллиптической прямой, взаимное 159
 — — точек по отношению к третьей 268
 — — точек на сегменте эллиптической прямой 162
 Расстояние между двумя точками в L_2 75, 77
 — — — — модели Клейна 86
 — — — — образах первой ступени 137
 — — — — псевдоевклидовом пространстве 314
 — — — — сферической одномерной геометрии 158
 — — — — $\mathcal{E}_2$ 165
 — — — — $\mathcal{E}_3$ 183
 — — — — эллиптической одномерной геометрии 159
 — — — — непрерывной прямой 302
 Расходящиеся геодезические 18
 Ребро возврата 25
 Риманово выражение элемента длины эллиптической плоскости 182

- Сближающиеся ряды точек 296
 Связки прямых параллельных 90
 — — расходящихся 90
 — — сходящихся 90
 Сегмент прямой 265
 Сегменты эллиптической прямой 162
 Середина отрезка, идеальная 104
 — — относительно абсолюта 103, 135
 Сечение Дедекинда 297
 Сигнатура 216
 Символы трехиндексные второго рода 150
 — — первого рода 150
 — — Христофеля 150
 Система Веронезе 282
 Скольжение 158
 — вдоль прямой 113, 116
 — плоскости L_2 вдоль прямой 96
 — по оси абсцисс в L_2 70
 Сложение отрезков 278
 Смежные ряды точек 296
 Совместность постулатов расположения 261
 — — — и структуры 265
 — — сравнения 255
 Степень свободы движений 56
 Стороны обращения отрезка 273
 — — прямой 273
 Структура архимедовой прямой 287
 Сумма отрезков 278
 — углов треугольника в $\mathcal{E}_2$ 176
 Сфера 26
 — действительного радиуса 317
 — мнимого радиуса 317
 — нулевого радиуса 317
 Теорема Бельтрами об интерпретации гиперболической плоскости 22
 — косинусов 175
 — о геодезическом отображении поверхности на плоскость 16
 — синусов 175
 — Шаля 177
 Theorema egregium Гаусса 16
 Точка 260
 — возврата 25
 — заострения 26
 — коническая 26
 — конформности 20
 — линии второго порядка, особая 118
 — образа, внутренняя 265
 — — крайняя 265
 — отрезка, конечная 273
 — —, начальная 273
 Точки бесконечно удаленные в L_2 88, 109
 — — — взаимно полярные 159
 — — — в $\mathcal{E}_2$ 165
 — — — в $\mathcal{E}_3$ 183
 — — — эллиптической прямой 141
 — — — граничные в L_2 88, 109
 — — — идеальные в L_2 88, 109
 — — — в гиперболической плоскости 88
 — — — обыкновенные в L_2 88, 109
 Точки отрезка внутренние 265
 — — — крайние 265
 — — сегмента внутренние 162
 — — — крайние 162
 — — скращения 92
 — — циклические 223
 Трактриса 27, 28
 Трансформация преобразования 46
 Треугольник автополярный в $\mathcal{E}_2$ 177
 — в эллиптической плоскости 171
 Треугольники взаимно полярные в $\mathcal{E}_2$ 177
 — с «фиксированной внутренностью» 173
 Трехсторонник в эллиптической плоскости 171
 Тригонометрические уравнения в L_2 82
 Тригонометрия эллиптической плоскости 174
 Угол в R_n , определение 149
 — между двумя векторами 314, 316
 — — — пересекающимися прямыми 191
 — — — прямыми 315
 — — — в $\mathcal{E}_2$ 169
 — — плоскостями в $\mathcal{E}_3$ 183
 — параллельности в L_2 , вычисление 81
 Упорядоченность множества точек на прямой 274
 Уравнение геодезической линии 15
 — 150
 — клиффордовых параллелей 205, 206
 — линии второго порядка в L_2 110
 — окружности в L_2 83
 — пары точек на прямой 130
 — плоскости в $\mathcal{E}_3$ 188
 — прямой в $\mathcal{E}_3$ 187
 — — параметрическое 188
 — —, полярной данной 192
 — точки на прямой 130
 — — пересечения двух прямых в $\mathcal{E}_2$ 170
 — — трактрисы 29
 Уравнения параметров 44
 Условие коллинеарности трех точек в $\mathcal{E}_2$ 168
 — — — — $\mathcal{E}_3$ 190
 — перпендикулярности двух прямых в $\mathcal{E}_2$ 169
 Фактор-группа 47
 Форма билинейная 132
 — бинарная 130
 — основная метрическая 147
 — — — в P_2 245
 — — — псевдосферы 31
 — — — сферы 14
 Формы дифференциальные метрические римановой геометрии 218
 Формула Лагерра 315
 Функции Гильберта 285
 Центр проективного преобразования 93
 Циклические точки плоскости 223

Часть отрезка 266	Экстремальная прямая для двух прямых в $\mathcal{E}_3$ 199
Четырехугольник чебышевский 34	Элемент длины 147
Числа Гильберта 286	— — в римановой геометрии 218
— характеристические 119	— — — $\mathcal{E}_2$ 166
Число, измеряющее отрезок 296	— — — $\mathcal{E}_3$ 186
Числовой ряд непрерывный 297	— координатный двумерный 152
Экватор эллиптической плоскости 167	— угла в римановой геометрии 219
Эквидистанта в L_2 83	Эллипс в L_2 125
— — L_2 127	— — —, идеальный 126
— — —, идеальная 127	— — —, мнимый 126
Экстремальная пара точек двух прямых в $\mathcal{E}_3$ 199	Эллиптическая пара точек 211
	Эрлангенская программа 39

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

I	211	HE	215	$\Omega(x_1, y_1; x_2, y_2)$	86, 130
II ₁	211	HM	213	Ω_{12}	86, 132
II ₂	211	HP	226	Ω_{11}, Ω_{22}	86, 135
III	218	K	14, 23, 38, 120	p, q	25
IV ₁	223	k	24	P_2	240
IV ₂	225	K_1, K_2, K_3	121	PE	223
V ₁	225	L_2	68	PH	225
V ₂	225	L_3	90	PP	229
VI	228	L	260	R	261
Γ_{jk}^i	150	L_2	88	R_a	261
$\Gamma_{i,jk}$	150	L_3	90	R_n	149, 264
ε	120	LII	265	R_r	261
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	121	LIII	277	r, t, s	25
E, F, G	15	LIV	297	S	119
E_2	68	L_a	284	T	119
E_3	164	μ	119	u_1, u_2, u_{12}	217
E_4	182	μ_1, μ_2, μ_3	119	X_n	148
EE	218	ν_1, ν_2, ν_{12}	78, 215, 217	η_1, η_2, η_3	121
EH	214	Ω	88	$\mathcal{E}_2$	164
EP	226	ω	88	$\mathcal{E}_3$	182
H(t)	285	$\Omega(x, y)$	86, 130		